UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

BEATRIZ LAIATE

Cálculo de Choquet com Aplicações em Dinâmica de Populações

Campinas

2017

Beatriz Laiate

Cálculo de Choquet com Aplicações em Dinâmica de Populações

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientador: Laecio Carvalho de Barros

Coorientador: Estevão Esmi Laureano

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Beatriz Laiate e orientada pelo Prof. Dr. Laecio Carvalho de Barros.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 130827/2015-0
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7312-4843

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L14c

Laiate, Beatriz, 1990-
Cálculo de Choquet com aplicações em dinâmica de populações / Beatriz Laiate. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Laecio Carvalho de Barros.
Coorientador: Estevão Esmi Laureano.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria da medida fuzzy. 2. Choquet, Cálculo de. 3. Dinâmica populacional. 4. Equações diferenciais. I. Barros, Laecio Carvalho de,1954-. II. Esmi, Estevão,1982-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Choquet Calculus with applications in population dynamics
Palavras-chave em inglês:
Fuzzy measure theory
Choquet calculus
Population dynamics
Differential equations
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Laecio Carvalho de Barros [Orientador]
Rodney Carlos Bassanezi
Fernando Antonio Campos Gomide
Data de defesa: 14-03-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de março de 2017 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LAECIO CARVALHO DE BARROS

Prof.(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Prof.(a). Dr(a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do(a) aluno(a).

Ao Valmir,
por ensinar desde conflitos políticos até a gema do mundo emocional,
cuja presença na minha vida nunca deixou de existir.
E à Dolores,
que deixou boas e calorosas lembranças desde 2005.

Agradecimentos

Esse é um trabalho feito a muitas mãos. Muitas pessoas foram responsáveis para que ele começasse e tomasse forma com o tempo.

Aos meus pais Maria Luisa e André, que me apoiaram de várias formas para que eu persistisse mesmo com todas as dificuldades.

Aos meus avós Neusa e Messias, que estiveram por trás de muitas pequenas necessidades ao longo dos anos, antes mesmo que eu começasse a pós-graduação.

À minha irmã Carolina, pelas experiências e conversas responsáveis por me tornar um ser político e consciente.

Aos meus queridos amigos de São Carlos, com os quais convivi os anos da graduação e que são nada menos que essenciais na minha existência. As muitas histórias e conversas sobre a vida e a matemática sempre me preenchem de esperança.

Aos meus queridos amigos de São Paulo, que conviveram comigo durante todos os anos de estrada e sala de aula anteriores à essa pós-graduação, em especial o Bob, o Will e o Hugo.

À Virginia, que me ensinou sobre o valor de se estar próximo de quem se ensina. Os caminhos traçados junto a ela em Ibiúna muito me acrescentaram.

Aos meus alunos do Colégio CK em Ibiúna, da Ufscar de Sorocaba, e dos cursinhos populares ACEPUSP e Projeto Ipês, que me fizeram perceber as minhas limitações como professora e provocaram a busca por algo mais a lhes oferecer.

Ao professor Wladimir da Ufscar de Sorocaba, que muito insistiu para que eu começasse a pós-graduação.

À Magda, pela amizade e pelas conversas antes e durante os últimos dois anos.

Ao meu querido orientador Laécio, pelo apoio e por todas as contribuições de várias ordens ao longo desses dois anos; sem que ele soubesse, sua convivência reacendeu em mim o sentido de voltar a estudar matemática.

Ao Estevão, pelos questionamentos precisos que levaram ao estudo intenso dos assuntos relativos a este trabalho.

Aos colegas do Programa de Pós-graduação que viveram a urgência e intensidade dos trabalhos acadêmicos nos últimos dois anos junto comigo.

Aos amigos de Campinas que enriqueceram a vida desde que comecei a jornada de estudos por aqui. Em especial, à Sara, ao Silvio e ao Natan, que me receberam no

P6 com braços abertos e sempre estiveram presentes de alguma forma; ao David, pela amizade e por estar junto sempre que precisei; à Ana, pela ternura e companhia em tantos momentos; ao Kiwi, pelo reencontro depois de tantos anos e apoio quando precisei de uma casa-lugar; aos amigos antropólogos, que com afeto e pensamento mobilizaram-me de tantas formas nos últimos tempos, em especial à Vibe e o Zé.

À Dora, por me apresentar do mundo aquilo que sozinha eu não poderia ver.

À secretaria de Pós-graduação do IMECC e ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada.

Ao CNPq, pelo finaciamento deste trabalho.

Resumo

A proposta neste trabalho é estudar o Cálculo de Choquet a partir do conceito de medida fuzzy. A Integral de Choquet foi desenvolvida para uma classe de medidas conhecidas como medida de capacidade. Uma medida fuzzy, definida por Sugeno (1974), tem origem na tentativa de flexibilização da medida de probabilidade no sentido de não exigir a aditividade. Assim como a medida clássica, uma medida fuzzy também possibilita a construção para uma teoria de integração análoga à clássica. Embora a Integral de Choquet em relação a uma medida fuzzy seja um funcional não-aditivo, ela possui propriedades interessantes que são elencadas neste trabalho. Inicialmente, tratamos da Integral de Choquet para funções positivas e crescentes. Em seguida, são feitas extensões para outras funções monotônicas. A teoria de Integral de Choquet, estruturada sobre essas propriedades, permite o desenvolvimento do conceito de Derivada de Choquet, como operação inversa da integração. A teoria de integral e a derivada construída é denominada Cálculo de Choquet. Com esse ferramental em mãos, estudamos equações diferenciais de Choquet bem como os Problemas de Valor Inicial. De uma maneira geral, a medida fuzzy abre a possibilidade de encontrar inúmeras soluções para um PVI clássico quando escrito sob a forma de PVI de Choquet. Em particular, quando estes PVIs descrevem dinâmicas populacionais, é possível encontrar soluções alternativas às soluções já conhecidas.

Palavras-chave: Medida Fuzzy. Integral de Choquet. Equações Diferenciais. Cálculo de Choquet. Medida de Lebesgue Distorcida. Dinâmicas Populacionais.

Abstract

This work aims to study the Choquet calculus from the concept of fuzzy measure. The Choquet integral was developed for a class of measures known as capacity measure. A fuzzy measure, defined by Sugeno (1974), has its origin in the attempt to the flexibility in the measure of probability in the sense of not requiring additivity. Similarly, as the classical measure, the fuzzy measure enables a theory of integration analogous to the classical one. Although Choquet integral in relation to a fuzzy measure is a non-additive functional, it has a series of interesting properties that are listed in this work. Initially we deal with the Choquet integral for positive increasing functions. Next, extensions are developed for other monotonic functions. The theory of Choquet integral, structured on these properties, allows the development of the concept of Choquet derivative as inverse operation integration. The integral and derivative theory constructed in this way are called Choquet calculus. We have studied the differential equations of Choquet as well as the Initial Value Problem (IVP). The fuzzy measure opens new ways to find numerous solutions for a classic IVP when written in the form of IVP of Choquet. In particular, when these IVPs describe population dynamics, it is possible to find different solutions from those already known.

Keywords: Fuzzy Measure. Choquet Integral. Differential Equations. Choquet Calculus. Distorted Lebesgue Measure. Population Dynamics.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\overline{\mathbb{R}}$	Conjunto dos números reais estendido
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial das matrizes $nx1$ com entradas reais
Ω	Conjunto não-vazio
$\mathcal{A}$	σ-álgebra de um conjunto Ω
$\mathcal{P}(\Omega)$	Conjunto das partes de Ω
$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$	União enumerável dos conjuntos A_i de $\mathcal{A}$
$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$	Interesecção enumerável dos conjuntos A_i de $\mathcal{A}$
A^c	Conjunto complementar de um conjunto A
$\int_{\Omega} f d\mu$	Integral de Lebesgue de f sobre o conjunto Ω
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	Integral de Riemann de f sobre o intervalo $[0, t]$
$(C) \int_{[0,t]} f d\mu$	Integral de Choquet de f sobre o intervalo $[0, t]$
$P(A)$	Medida de probabilidade do evento A
$\mathcal{L}\left(f(t)\right)$	Transformada de Laplace da função f
$\mathcal{F}^+$	Conjunto das funções reais positivas não-crescentes
$\mathcal{F}^-$	Conjunto das funções reais positivas não-decrescentes
μ_m	Medida de Lebesgue distorcida
$\frac{df}{d\mu_m}$	Derivada de f em relação à medida fuzzy μ_m
$\frac{df}{dt}$	Derivada clássica de f em relação a t
$\mathcal{C}^+$	Conjunto das funções reais não-decrescentes
$\mathcal{C}^-$	Conjunto das funções reais não-crescentes

Sumário

Introdução

O conceito de medida fuzzy já foi amplamente discutido em inúmeros trabalhos anteriores a este. Os termos Medida Fuzzy e Integral Fuzzy foram introduzidos pela primeira vez por Sugeno [15], motivado pela questão de quantificar avaliações humanas subjetivas. No contexto da teoria dos conjuntos fuzzy, as medidas fuzzy representam uma flexibilização das medidas e, em particular, as de probabilidade. Um exemplo é o problema clássico em que, dado qualquer subconjunto A de X e um ponto $x \in X$, uma função de conjuntos $\mu_x(A)$, representando uma medida fuzzy nesse espaço, assume um valor em $[0, 1]$ para expressar o quanto $x \in A$ [13].

Sugeno [15] estabelece a diferença entre o conceito de *fuzziness* e a aleatoriedade contemplada pela teoria de probabilidade. A primeira, introduzida pela Teoria dos Conjuntos Fuzzy, diz respeito a uma incerteza causada pela subjetividade, e a última pode ser causada por fenômenos aleatórios, ou seja, fenômenos físicos e objetivos. Segundo Sugeno, medidas fuzzy são definidas como escalas subjetivas para fuzziness. Já as integrais fuzzy são funcionais definidos com relação a medidas fuzzy e correspondem à esperança probabilística de um determinado evento.

A análise probabilística frequentista preocupa-se essencialmente em encontrar a chance com que experimentos aleatórios podem acontecer. A definição axiomática de probabilidade foi dada por Kolmogorov [10] de forma que, considerando experimentos com um número finito de resultados, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis para a sua ocorrência e o número de casos possíveis do espaço amostral.

Nguyen estabelece que medidas fuzzy podem ser vistas como forma de considerar modelos de probabilidade imprecisos, onde surgem funções de conjunto não-aditivas, como a probabilidade superior e inferior[12]. Barros e Esmi [8] desenvolvem uma construção interpretativa a partir delas ao relacioná-las com a medida de possibilidade, conceito exclusivo da teoria dos conjuntos fuzzy [19]. Assim, ao surgir da flexibilização das propriedades das medidas de probabilidade, as medidas fuzzy são funções de conjunto não-aditivas.

Choquet [3] introduziu o conceito de Integral de Choquet em 1953 com relação a uma capacidade, função monotônica de conjuntos com valores positivos, em estudos de mecânica. Sugeno foi o primeiro a descrevê-la como uma integral em relação a uma medida fuzzy [15], tendo sido seu objeto de estudo em artigos recentes ao propor uma teoria de cálculo baseada nesta, intitulada Cálculo de Choquet. Com essa noção de cálculo diferencial, desvendar as propriedades do Cálculo de Choquet parece ser pertinente do ponto de vista da construção do cálculo diferencial e integral usando medida fuzzy.

Neste texto, procuramos entender as propriedades do Cálculo de Choquet através do trabalho desenvolvido por Sugeno. Em [17], o autor estabelece a equivalência entre a equação diferencial com derivada de uma função em relação a uma medida fuzzy (que denominamos Derivada de Choquet) e a equação integral com integral de Choquet. A Transformada de Laplace é ferramenta central para as soluções analíticas das equações diferenciais.

A linearização do modelo populacional de Verhulst, como uma equação diferencial de Bernoulli, motivou-nos a questionar as hipóteses sobre as quais Sugeno definiu a derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy. A definição da derivada dada pelo autor se restringe ao espaço das funções monótonas e positivas, bem como a representação da integral de Choquet dessas funções. Se fosse possível flexibilizar essa hipótese, seria possível encontrar soluções alternativas para o modelo logístico e, posteriormente, para outros modelos de dinâmicas populacionais presentes na literatura.

Organizamos essa dissertação da seguinte maneira:

No Capítulo 1 são definidos os conceitos de medida clássica e construída a Integral de Lebesgue em relação à essa medida como funcional da medida dos níveis de uma função real. É definida medida de probabilidade e elencadas suas propriedades mais imediatas. É definido o conceito de medida fuzzy e medida fuzzy como medida de Lebesgue distorcida, sobre a qual trabalhamos todos os resultados obtidos. Revisamos a definição de Transformada de Laplace e sua relação com a integral de convolução, cujo uso se estende para os Capítulos 2 e 3. Dispomos uma tabela das funções elementares e suas respectivas transformadas de Laplace.

No Capítulo 2 apresentamos o trabalho de Sugeno elencando as propriedades básicas do Cálculo de Choquet via integral e derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy. Definimos o conceito de Integral de Choquet e demonstramos dois resultados principais a respeito dessa integral de funções monótonas positivas. Movidos pela questão da existência da solução da equação integral de Choquet, definimos o conceito de derivada de uma função em relação a uma medida fuzzy como operação inversa da integral nos mesmos espaços de funções da Seção 2.1. São especificadas as hipóteses exigidas por Sugeno para a existência dessa derivada. Exemplificamo a resolução das equações integrais de Choquet por meio da Transformada de Laplace. Como ferramenta de comparação entre a derivada de Choquet e a derivada clássica, incluímos na última seção uma relação algébrica entre as duas derivadas utilizando duas famílias de funções de distorção das medidas fuzzy.

No Capítulo 3 propomos uma extensão dos resultados do Capítulo 2 para funções reais monótonas não necessariamente positivas. Escolhemos por representar a integral de Choquet dessas funções e definimos a derivada dessas funções como operação inversa da integral.

No capítulo 4 discorremos sobre a teoria de equações diferenciais com derivadas de Choquet proposta por Sugeno, principalmente da generalização da função exponencial que surge como solução de algumas dessas equações. Propusemos um método numérico para calcular a Integral de Choquet sobre um campo de crescimento populacional e fizemos simulações o Modelo de Von Bertalanffy [18]. Além disso, representamos as dinâmicas de transferência de HIV de Anderson [1] e do modelo populacional de Verhulst como Problemas de Valor Inicial com derivada de Choquet, cujas soluções coincidem com as soluções clássicas, ainda que permitem interpretações biológicas para a medida fuzzy nessas modelagens.

1 Medidas e Transformada de Laplace

Neste capítulo introduzimos as definições de medida, medida de probabilidade e medida fuzzy. Além disso, citamos brevemente a construção da Integral de Lebesgue como uma motivação para a definição da Integral de Choquet [3]. Por último, como ferramenta fundamental deste trabalho na resolução de equações diferenciais, as Transformadas de Laplace e suas propriedades mais imediatas são elencadas resumidamente.

1.1 Medidas Clássicas

Na teoria de medida clássica, a definição de medida pretende estender o comprimento de um intervalo $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ dado por $l([a, b]) = b - a$, onde $a \leqslant b$, para todos os conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$. Qualquer conjunto obtido construtivamente a partir de conjuntos mensuráveis é um conjunto mensurável. *Obtido construtivamente a partir de conjuntos mensuráveis* neste contexto significa obtido por união e intersecção de sequência de conjuntos mensuráveis e por passagem ao complementar [9].

Para estabelecer os espaços sobre os quais as medidas estão definidas, considere $\Omega \neq \varnothing$ e $\mathcal{P}(\Omega)$ = conjunto das partes de Ω.

Definição 1.1. *[9] Uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$é chamada uma σ-álgebra se satisfizer os seguintes axiomas:*

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c = (\Omega - A) \;\in \mathcal{A}$;
3. *Se* $A_i \in \mathcal{A}$ *com* $i \in \mathbb{N}$, *então* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

*O par $(\Omega, \mathcal{A})$ é chamado **espaço mensurável**.*

Seja $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a reta estendida e $\mathcal{F} \doteq \{I : I$ é um intervalo de $\overline{\mathbb{R}}^n\}$. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, consideremos uma coleção enumerável de intervalos abertos que cobrem o conjunto A, ou seja,

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Definição 1.2. *Sejam Ω um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. A função $\mu^* : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior** se:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;

2. μ^* *é* $\sigma-$*subaditiva, isto é,*

$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k),$$

para toda família $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$.

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$*, definimos a função* $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *por*

$$m^*(A) = inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\},$$

*chamada **medida exterior de Lebesgue**, onde* $l(I_k)$ *é o comprimento do intervalo* I_k*,* $k \in \mathbb{N}$.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável se para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, temos:

$$m^*(E) = m^*(E \cap X) + m^*(E \cap X^c),$$

onde $X^c = \mathbb{R}^n - X$.

Em particular, todos os intervalos abertos da reta real são conjuntos mensuráveis. Equivalentemente, todos os intervalos fechados da reta são conjuntos mensuráveis [9].

Definição 1.3. *A função* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *é uma **medida** se* $\mu(\emptyset) = 0$ *e se for* σ*-aditiva, ou seja, se*

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

sempre que $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *for uma família de conjuntos disjuntos dois a dois, isto é,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$.

As Definições 1.2 e 1.3 estão relacionadas através do seguinte:

Teorema 1.1. *[9] Seja* m^* *a medida exterior de Lebesgue no* $\mathbb{R}^n$*. Então vale*

(a) *A classe* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *de todos os subconjuntos mensuráveis de* $\mathbb{R}^n$ *é uma* σ*-álgebra;*

(b) *A restrição* $m = m^*\Big|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ *é uma medida;*

(c) *Todo conjunto de medida exterior nula é mensurável.*

Se $E \in \mathcal{M}$, definimos a **medida de Lebesgue** do conjunto E, indicada por $m(E)$, como $m(E) \doteq m^*(E)$.

Como um dos casos de medida, a medida de probabilidade é definida com a única restrição que seu contra-domínio é o intervalo $[0,1]$. A ideia central na definição de probabilidade é identificar cada evento como um subconjunto de um espaço amostral e associar a esse conjunto um número para indicar a chance de sua ocorrência. Dessa forma, a probabilidade é simplesmente uma função real de conjuntos com as propriedades listadas abaixo.

Definição 1.4. *[5] Uma **medida de probabilidade** é uma função $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *Se* $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots \in \mathcal{A}$ *e* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *sempre que* $i \neq j$, *então* $P(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$ *(σ-aditividade).*

A tripla $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é chamada **espaço de probabilidade**.

São consequências imediatas da definição acima as seguintes propriedades:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
- $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i)$ se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, onde $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$ *(continuidade inferior)*;
- $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i)$ se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, onde $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$ *(continuidade superior).*

Demonstração.

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

  Como $A \cap A^c = \varnothing$, pela σ-aditividade de P, temos que $P(A \cap A^c) = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$. Assim, $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ e, portanto, $P(A^c) = 1 - P(A)$. Em particular, $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

Se $A \subseteq B$, então $B = A \cup (B - A) \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$, onde $A \cap (B - A) = \varnothing$ e a interesecção de qualquer subconjunto com o conjunto vazio é o conjunto vazio. Pela σ-aditividade de P, temos que $P(B) = P(A) + P(B - A) + P(\varnothing) + \ldots + P(\varnothing) + P(\varnothing) = P(A) + P(B - A) \geqslant P(A)$, já que $P(B - a) \geqslant 0$.

- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, onde $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$

Para provar a igualdade, vamos utilizar o:

Lema 1.1. *Seja $(A_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{A}$ decrescente para o vazio. Então $P(A_n) \to 0$.*

Demonstração. Se $A_n \downarrow \phi$, temos $A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})$.

Os conjuntos $A_k - A_{k+1}$ são disjuntos, logo

$$P(A_1) = P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k - A_{k+1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1})$$

mas pela aditividade finita temos:

$$P(A_k) = P(A_{k+1}) + P(A_k - A_{k+1}) \text{ ou}$$

$$P(A_k - A_{k+1}) = P(A_k) - P(A_{k+1}). \text{ Assim,}$$
$$P(A_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k - A_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_k) - P(A_{k+1}))$$
$$\lim_{n\to\infty} (P(A_1) - P(A_n)) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
$$\text{Logo, } \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

□

Vamos supor que $A_n \uparrow A$, isto é, que $A_n \subseteq A_{n+1}$ e que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$.

Então $P(A_{n+1}) \geqslant P(A_n)$ e $(A - A_n) \to \varnothing$. Pelo lema anterior,

$P(A - A_n) \to 0$. Como $P(A - A_n) + P(A_n) = P(A)$, já que

$A = (A_n) \cup (A - A_n)$, então $P(A - A_n) = P(A) - P(A_n)$ e, portanto,

$P(A) - P(A_n) \to 0$, ou seja, $P(A_n) \to P(A)$.

Logo, $\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\lim_{i\to\infty} A_i)$.

$\square$

1.2 Medidas Fuzzy

Ao flexibilizar o conceito de medida abrindo mão do conceito de σ-aditividade, Sugeno [15] sugeriu o conceito de medida fuzzy somente com as exigências da positividade e da monotonicidade. No entanto, o conceito de medida fuzzy varia entre autores. Barros e Bassanezi [6] consideram-na uma função de conjuntos cujo contra-domínio é o intervalo $[0,1]$, como na definição original [15]. Nguyen e Walker [12] definem-na com imagem contida em todo o intervalo real positivo $[0,\infty)$. Nos trabalhos mais recentes de Sugeno [16][17], a definição dada é a seguinte:

Sejam $\Omega \neq \varnothing$ um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Definição 1.5. *[17] Uma medida fuzzy (medida não-aditiva ou capacidade) μ no espaço $(\Omega,\mathcal{A})$ é uma função de conjuntos $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ tal que*

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *se* $A \subset B$;
3. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *se* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$, *onde* $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$;
4. $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *se* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, *onde* $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}$.

A tripla $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ é chamada ***espaço de medida fuzzy****.*

A condição (1) estabelece a *não-negatividade*, (2) a *monotonicidade* e (3) e (4) a *continuidade inferior e superior* respectivamente. A propriedade (2) é a mais importante e a continuidade de (3) e (4) é essencial somente quando Ω é conjunto infinito. Dessa forma, podemos enunciar a seguinte:

Proposição 1.1. *[5]*

Sejam Ω um conjunto finito e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de Ω. Um função $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ é uma medida fuzzy em Ω se e somente se valem:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *se* $A \subset B$*.*

Demonstração. Se μ é medida fuzzy, nada temos a demonstrar. Por outro lado, seja $\mu : \Omega \to [0, \infty)$ nas condições acima e considere uma sequência crescente $\{A_i\}_{i \in \mathcal{L}} \subset \mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω. Tal sequência tem no máximo um número finito de conjuntos, digamos $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m$. Daí, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \mu(A_m) = \lim_{n\to\infty}(A_n)$, o que demonstra a continuidade inferior. De modo análogo se prova a continuidade superior.

□

1.3 Integral de Lebesgue

Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$, ou seja, a menor σ-álgebra contendo os intervalos abertos reais. Para o texto seguinte, consideremos o fato que toda função positiva f é o limite de uma sequência de funções simples, que convergem pontualmente para esta.

Definição 1.6. *Dizemos que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é* ***mensurável*** *se* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para qualquer* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Especificamente, f é mensurável se e somente se para $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$, ou equivalentemente, se $\{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$.

Considere que $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ seja a reta estendida, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{-\infty\}$ definida na teoria de medida clássica.

Para $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ escrevemos

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= f(\omega).\chi_{\{f \geqslant 0\}}(\omega) + f(\omega).\chi_{\{f \leqslant 0\}}(\omega) \\
&= f(\omega).\chi_{\{f \geqslant 0\}}(\omega) - (-f(\omega).\chi_{\{f \leqslant 0\}}(\omega)) \\
&= f^+(\omega) - f^-(\omega),
\end{aligned}
$$

com $f^+, f^- : \Omega \to [0, \infty]$, onde $\{f \leqslant 0\} = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \leqslant 0\}$ e $\{f \geqslant 0\} = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \geqslant 0\}$.

Suponha que $g : \Omega \to [0, \infty)$ (ou $[0, \infty]$) seja uma função simples, ou seja,

$$
g(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(\omega). \tag{1.1}
$$

onde $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ é uma partição de Ω, ou seja, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$, e χ_{A_i} é a função característica de A_i dada por:

$$\chi_{A_1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A_1 \\ 0, & \text{se } \omega \notin A_1. \end{cases}$$

Definição 1.7. *Quando μ é medida σ-aditiva definida em $(\Omega, \mathcal{A})$, a integral de Lebesgue da função simples g sobre Ω, definida como na Equação 1.1, com respeito à medida (clássica) μ, é dada por*

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Seja $g : \Omega \to [0, \infty)$ simples definida por $g(\omega) = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i \chi_{(A_i)}(\omega)$ para $\omega \in \Omega$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ e defina $[g]^\alpha = \{\omega : g(\omega) \geqslant \alpha\}$ para $\forall\, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_n]$.

Temos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$ e que

$$\begin{aligned} [g]^{\alpha_1} &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ [g]^{\alpha_2} &= \bigcup_{i=2}^{n} A_i \\ &\vdots \\ [g]^{\alpha_n} &= A_n, \end{aligned}$$

e, para qualquer $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$, já que μ é σ-aditiva.

Logo, $\int_\Omega g\, d\mu$ pode ser reescrita como

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(\omega : g(\omega) \geqslant \alpha_i).(\alpha_i - \alpha_{i-1}), \tag{1.2}$$

onde $\alpha_0 = 0$.

Para uma representação geral da Integral de Lebesgue, vamos utilizar o seguinte:

Teorema 1.2. *(Teorema da convergência uniforme)[12]*

Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente de funções mensuráveis não-negativas, então*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu,$$

onde as integrais acima são definidas de acordo com a Definição 1.7.

Logo, se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família crescente de funções simples e $f : \Omega \to [0,\infty)$ é tal que $f_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\omega)$ para $\omega \in \Omega$, então

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu, \tag{1.3}$$

ou seja, a integral de uma função positiva $f : \Omega \to [0,\infty)$, que é limite de uma sequência de funções simples, em relação à medida (clássica) μ é o limite das integrais dessas funções simples. Assim,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \geqslant \alpha\} d\alpha. \tag{1.4}$$

1.4 Transformada de Laplace

Escreveremos essa seção tendo como principais referências [2] e [7].

A Transformada de Laplace é uma ferramenta muito utilizada na resolução de equações diferenciais e integrais. Além de ser um funcional linear, possui a importante propriedade de trnsformar uma integral de convolução em uma multiplicação de transformadas (Teorema 1.4). No Capítulo 2 veremos que a Integral de Choquet de uma função crescente é um integral de convolução e, portanto, pode ser avaliada por meio de sua Transformada de Laplace.

Uma **Integral imprópria** de uma função real f sobre um intervalo ilimitado é definida como um limite de integrais sobre intervalos finitos:

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)dt, \tag{1.5}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Se a integral de a até A existir para todo $A > a$ e se existir o limite quando $A \to \infty$, diremos que a integral imprópria converge para esse valor limite. Caso contrário, a integral diverge ou não existe.

Uma função f é dita **contínua por partes** em um intervalo $[a, b]$ se existe uma partição finita $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que f é contínua em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e se os limites laterais nas fronteiras dos subintervalos são finitos.

Uma **transformada integral** de uma função f é um funcional F dado por

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt, \tag{1.6}$$

onde $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um funcional dado, chamado **núcleo da transformação**. A Equação 1.6 transforma a função f em outra F, chamada transformada de f. Assumimos que é possível que $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$ ou ambos.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; a **Transformada de Laplace** de f é definida pela equação

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{1.7}$$

sempre que essa integral imprópria convergir.

A existência da transformada de Laplace de uma função é garantida sob algumas condições:

Teorema 1.3. *[2] Suponha que*

1. *f seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*

2. *$|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para alguma constante $a > 0$ quando $t \geqslant M$, onde $K, M > 0$ são constantes.*

   Então a transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ definida pela Equação 1.7 existe para $s > a$.

No teorema a seguir enunciamos uma das principais propriedades desse funcional.

Teorema 1.4. *[2] Sejam f e g duas funções reais e suponha que ambas as transformadas de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ e $\mathcal{L}[g(t)]$ existam para $s > a \geqslant 0$. Então vale que*

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}[h(t)], \; s > a$$

para $h(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$

A função h é chamada convolução de f e g; algumas vezes a integral acima é chamada integral de convolução e é denotada por $h(t) = (f * g)(t)$.

A convolução $(f * g)(\cdot)$ tem algumas propriedades da multiplicação usual, a saber:

$$f * g = g * f \text{ (comutatividade);}$$
$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \text{ (distributividade);}$$
$$(f * g) * h = f * (g * h) \text{ (associatividade);}$$
$$f * 0 = 0 * f = 0.$$

Na página seguinte listamos as Transformadas de Laplace das funções elementares [2].

Tabela 1 – Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\dfrac{1}{s}$, $s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
t^n, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$
$sen(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$senh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$e^{at} sen(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at} cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$
$u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$
$e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\dfrac{1}{c} F\left(\dfrac{s}{c}\right)$, $c > 0$
$\displaystyle\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$(-1)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

2 Cálculo de Choquet

Analogamente à integral de Lebesgue, definida em relação a uma medida clássica, a Integral de Choquet como Integral Fuzzy é construída a partir do conceito de medida fuzzy. Como veremos nos teoremas e definições que se seguem, a integração de funções reais com relação a medidas fuzzy, usando a integral de Choquet, não depende das continuidades superior e inferior estabelecidas na Definição 1.5, mas apenas do fato de que μ é monótona [12]. De um modo geral, a Integral de Choquet de funções reais é um funcional não-aditivo, apresentando propriedades importantes quando aplicada a funções monótonas. O estudo deste capítulo é baseado nos recentes artigos de Sugeno, a saber,[16] e [17].

2.1 Integral de Choquet

Definição 2.1. *[12] Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy com $\mu(\Omega) < \infty$. A integral de Choquet de uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ com relação a μ é dada por*

$$(C)\int_{\Omega} f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\omega : f(\omega) > t)dt + \int_{-\infty}^{0} \left(\mu(\omega : f(\omega) > t) - \mu(\Omega)\right) dt, \tag{2.1}$$

e, para $A \in \mathcal{A}$,

$$(C)\int_{A} f d\mu = \int_0^{\infty} \mu((\omega : f(\omega) > t) \cap A)dt + \int_{-\infty}^{0} \left(\mu((\omega : f(\omega) > t) \cap A) - \mu(A)\right) dt. \tag{2.2}$$

Dessa forma, a integral de Choquet de uma função real f sobre um conjunto Ω é a soma de duas integrais de Riemann impróprias. Assim como na Equação 1.4, que fornece a expressão da Integral de Lebesgue de uma função, a Integral de Choquet sobre um intervalo real positivo pode ser obtida pela integral de Riemann da função que fornece a medida fuzzy dos "níveis"de f.

Estabelecida a Definição 2.1 de Integral de Choquet, considere o conjunto $\mathcal{F}^+$ das funções $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínuas, mensuráveis, não-negativas e não-decrescentes.

Tomando $A = [0, t] \subset \mathbb{R}$ e $g \in \mathcal{F}^+$ na expressão (2.2), temos que:

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{-\infty}^{0} \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{\infty} \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{-\infty}^{0} \mu([0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{\infty} \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sabendo disso, consideremos a seguinte identidade:

$$f(t) = \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr. \tag{2.4}$$

A questão que se coloca é:

Questão 2.1. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua com $f(0) = 0$ e uma medida fuzzy μ, é possível encontrar uma função crescente e contínua g que satisfaça 2.4?*

Para responder a essa questão, vamos começar pela seguinte consideração: seja λ a medida de Lebesgue tal que para $[a,b] \subset [0,\infty)$, $\lambda([a,b]) = b - a$ e μ a medida fuzzy dada a partir de λ como abaixo:

Definição 2.2. *Seja $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente e contínua com $m(0) = 0$. Uma medida fuzzy μ_m é uma medida de Lebesgue distorcida se:*

$$\mu_m(\cdot) = m(\lambda(\cdot)) \tag{2.5}$$

Claro que $\mu_m([a,b]) = m(\lambda([a,b])) = m(b-a)$ sempre que $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Para t fixado, consideremos que $\mu([\tau,t]) = h(\tau)$ é função diferenciável em relação a τ em $[0,t]$ para todo $t > 0$ e escrevemos

$$\mu'([\tau,t]) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mu([\tau,t]) \tag{2.6}$$

Note que $\mu'([\tau,t]) \leqslant 0$ para $\tau \leqslant t$, já que se $\tau_1 < \tau_2$, então $[\tau_2,t] \subseteq [\tau_1,t]$ e, portanto, $\mu([\tau_2,t]) \leqslant \mu([\tau_1,t])$, pois μ é monótona. Logo, $\mu'([\tau,t]) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\mu([\tau,t]) \leqslant 0$ para $\tau \leqslant t$.

Se $\mu = \mu_m$, então $\mu'([\tau,t]) = -m'(t-\tau)$. Essa expressão simples para a derivada de μ_m sugere o começo da resposta da questão 2.1. Vamos utilizá-la na seguinte:

Proposição 2.1. *Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ estritamente crescente. Então a integral de Choquet de g em relação a μ em $[0,t]$ vale:*

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

Em particular, para $\mu = \mu_m$ temos

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&(C)\int_{[0,t]} g d\mu \\
&\overset{(2.3)}{=} \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr \\
&= \int_0^{g(0)} \mu([0,t])dr + \int_{g(0)}^{g(r)} \mu(g^{-1}(r),t)dr \\
&= \mu([0,t])g(0) + \int_{g(0)}^{g(t)} \mu([g^{-1}(r),t])dr.
\end{aligned}$$

Seja $r = g(\tau)$; fazendo a substituição de variáveis na integral, temos que $dr = g'(\tau)d\tau$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{g(0)}^{g(t)} \mu([g^{-1}(r),t])dr \\
&= \int_0^t \mu([\tau,t])g'(\tau)d\tau \\
&= \mu([\tau,t])g(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau \\
&= \mu(\{t\})g(t) - \mu([0,t])g(t) - \int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu(\tau) \\
&= \mu([0,t])g(t) - \mu([0,t])g(t) - \int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau \\
&= -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Quando $\mu = \mu_m$, $\mu'_m([\tau, t]) = -m'(t-\tau)$ e, portanto

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = -\int_0^t -m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

□

Proposição 2.2. *Seja g a função constante $g(t) = C, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Então*

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([\tau, t])C d\tau \tag{2.9}$$

e, para $\mu = \mu_m$,

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = Cm(t). \tag{2.10}$$

Demonstração. Temos que

$$\int_{[0,t]} g d\mu = \int_0^\infty \mu(\{\tau | C \geqslant r\}) \cap [0,t])dr = \int_0^C \mu([0,t])d\tau = \mu([0,t])C,$$

que pode ser reescrita como $\mu([0,t])C = -\int_0^t \mu'([\tau,t])C d\tau$, já que $\mu([t,t]) \doteq 0$.

No caso em que $\mu = \mu_m$, podemos escrever $\mu_m([0,t]) = m(\lambda([0,t]))$

$m(t-0) = m(t)$, já que λ é medida de Lebesgue. Logo,

$$\int_{[0,t]} C d\mu_m = C\mu([0,t]) = Cm(t).$$

□

As Proposições 2.1 e 2.2 garantem que a integral de Choquet sobre o intervalo $[0,t]$ das funções estritamente crescentes e das funções constantes é uma integral de Riemann dada pelas Equações 2.7 e 2.9, respectivamente. Em geral, para $g \in \mathcal{F}^+$ vale o seguinte:

Teorema 2.1. *Seja $g \in \mathcal{F}^+$, então a integral de Choquet de g com respeito a μ em $[0,t]$ é dada por:*

$$\int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) = -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau \tag{2.11}$$

Em particular, se $\mu = \mu_m$, então

$$\int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) = \int_0^t m'(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{2.12}$$

Demonstração. [17]

Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua e não-decrescente tal que:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ g_2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ g_3(t), & t_2 \leqslant t \leqslant \infty, \end{cases}$$

onde $g_1(t)$ e $g_3(t)$ são estritamente crescentes, g_2 é constante e $g_1(t_1) = g_2 = g_3(t_2)$.

Seja

$$f(t) = \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) dr.$$

(i) Para $0 \leqslant t < t_1$, pela Proposição 2.1, temos

$$f(t) = -\int_0^t \mu'([\tau,t]) g_1(\tau) d\tau.$$

(ii) Para $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, assumimos sem perda de generalidade que $g_1(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) \\ &= \int_0^{g_1(t_1)} \mu([g^{-1}(r), t]) dr \\ &= \int_0^{t_1} \mu([\tau,t]) {g_1}'(\tau) d\tau \\ &= \mu([\tau,t]) g_1(\tau) \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t]) g_1(\tau) d\tau \\ &= \mu([t_1,t]) g_1(t_1) - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t]) g_1(\tau) d\tau \\ &= \mu([t_1,t]) g_2 - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t]) g_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Reescrevendo $\mu([t_1,t]) g_2$ como $-\int_{t_1}^t \mu'([\tau,t]) g_2 d\tau$, temos:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -\int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t} \mu'([\tau,t])g_2 d\tau \\
&= -\int_0^{t} \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

(iii) Para $t_2 \leqslant t < \infty$ e assumindo que $g_1(0) = 0$, temos que:

$$
f(t) = \int_0^{g_3(t_2)} \mu([g^{-1}(r),t])dr + \int_{g_3(t_2)}^{g_3(t)} \mu([g_3{}^{-1}(r),t])dr.
$$

Para o primeiro termo, sabendo que $g_3(t_2) = g_1(t_1)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{g_3(t_2)} \mu([g^{-1}(r),t])dr &= \int_0^{g_1(t_1)} \mu([g^{-1}(r),t])dr \\
&= \int_0^{t_1} \mu([\tau,t])g_1'(\tau)d\tau \\
&= \mu([\tau,t])g_1(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau \\
&= \mu([t_1,t])g_1(t_1) - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau \\
&= \mu([t_1,t])g_2 - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Para o segundo termo, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_{g_3(t_2)}^{g_3(t)} \mu([g_3 - 1(r),t])dr &= \int_{t_2}^{t} \mu([\tau,t])g_3'(\tau)d\tau \\
&= \mu([\tau,t])g_3(\tau)\Big|_{t_2}^{t} - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau,t])g_3(\tau)d\tau \\
&= -\mu([t_2,t])g_3(t_2) - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau,t])g_3(\tau)d\tau \\
&= -\mu([t_2,t])g_2 - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau,t])g_3(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
f(t) = -\int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau + \mu([t_1,t])g_2 - \mu([t_2,t])g_2 - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau,t])g_3(\tau)d\tau.
$$

Já que $\mu(t_1,t) - \mu([t_2,t]) = -\int_{t_1}^{t_2} \mu'([\tau,t])d\tau$, segue que

$$\begin{aligned} f(t) &= -\int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g_1(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \mu'([\tau,t])g_2 d\tau - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau,t])g_3(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^{t} \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Para $\mu = \mu_m$, usando que $\mu_m'([\tau,t]) = -m'(t-\tau)$,

$$f(t) = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

□

2.1.1 Propriedades da Integral de Choquet

Sejam $g, h \in \mathcal{F}^+$ e a uma constante positiva. Então a integral de Choquet definida no intervalo $[0,t]$ com relação a uma medida fuzzy $\mu = \mu_m$ possui as seguintes propriedades:

1. $(C)\int_0^t a d\mu_m = am;$
2. $(C)\int_0^t ag d\mu_m = a\left((C)\int_0^t g d\mu_m\right);$
3. $(C)\int_0^t (g+h) d\mu_m = (C)\int_0^t g d\mu_m + (C)\int_0^t h d\mu_m;$
4. $(C)\int_0^t g d\mu_{am} = a\left((C)\int_0^t g d\mu_m\right);$
5. $g \leqslant h \Rightarrow (C)\int_0^t g d\mu_m \leqslant (C)\int_0^t h d\mu_m;$
6. $m \leqslant n \Rightarrow (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m \leqslant (C)\int_{[0,t]} g d\mu_n;$
7. $t_1 \leqslant t_2 \Rightarrow (C)\int_0^{t_1} g d\mu_m \leqslant (C)\int_0^{t_2} g d\mu_m;$
8. $\int_0^t g d\mu_{m+n} = (C)\int_0^t g d\mu_m + (C)\int_0^t g d\mu_n;$

Demonstração.

1. De fato: $(C)\int_0^t a d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)a d\tau = a\int_0^t m'(t-\tau)d\tau.$

   Fazendo a mudança de variáveis dada por $u = t-\tau$, temos que $du = -d\tau$ e que $(C)\int_0^t a d\mu_m = a\int_t^0 -m'(u)du = a\int_0^t m'(u)du = am(t).$

2. De acordo com o Teorema 2.1 temos que $(C)\int_0^t agd\mu_m =$

   $\int_0^t m'(t-\tau)(ag(\tau))d\tau = a\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = a(C)\int_0^t gd\mu_m.$

3. $(C)\int_0^t (g+h)d\mu_m = (C)\int_0^t m'(t-\tau)(g+h)(\tau)d\tau.$
   Pela aditividade da integral de Riemann, essa última expressão é igual a
   $\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + (C)\int_0^t m'(t-\tau)h(\tau)d\tau = (C)\int_0^t gd\mu_m + (C)\int_0^t hd\mu_m.$

4. $(C)\int_0^t gd\mu_{am} = \int_0^t (am)'(t-\tau)g(\tau)d\tau$, onde $(am)(\tau) = am(\tau), \forall\tau \in [0,t]$, ou seja, $(am)'(t-\tau) = am'(t-\tau)$. Assim, $(C)\int_0^t gd\mu_{am} =$

   $\int_0^t am'(t-\tau)g(\tau)d\tau = a\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = a\left((C)\int_0^t gd\mu\right).$

5. Sejam $g,h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com $g(t) \leqslant h(t), \forall t > 0$. Então $(h-g)(t) \geqslant 0$ e vale

$$
\begin{aligned}
(C)\int_0^t gd\mu_m &= \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&\leqslant \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t m'(t-\tau)(h-g)(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t m'(t-\tau)h(\tau)d\tau = (C)\int_0^t hd\mu_m.
\end{aligned}
$$

6. Pela Expressão 2.3,

$$
\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} gd\mu_m &= \int_0^\infty \mu_m(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) \\
&= \int_0^\infty m(\lambda(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])) \\
&\leqslant \int_0^\infty n(\lambda(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])) \\
&= \int_0^\infty \mu_n(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) = (C)\int_{[o,t]} gd\mu_n
\end{aligned}
$$

7.

$$\begin{aligned}
(C)\int_0^{t_1} g d\mu_m &= \int_0^{t_1} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau \leqslant \\
&\leqslant \int_0^{t_1} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{t_2} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = (C)\int_0^{t_2} g d\mu_m
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
&(C)\int_0^{t} g d\mu_{m+n} = \int_0^{t} (m+n)'(t=\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{t} (m'+n')(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^{t} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^{t} n'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= (C)\int_0^{t} g d\mu_m + (C)\int_0^{t} g d\mu_n.
\end{aligned}$$

□

2.2 Derivada de Choquet

O Teorema 2.1 indica que a Integal de Choquet para funções positivas e não-crescentes é uma convolução e, portanto, a Transformada de Laplace parece ser uma ferramenta de resolução para a solução do problema inverso colocado pela Questão 2.1. O leitor interessado em Transformadas de Laplace e suas propriedades pode consultar [2] ou [7].

A seguinte proposição mostra como usar a Transformada de Laplace para calcular a Integral de Choquet.

Proposição 2.3. *Seja* $f(t) = \displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$*. Se* $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$*,* $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ *e* $M(s) = \mathcal{L}(m(t))$*, então* $F(s) = sM(s)G(s)$*, e, portanto,*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[sM(s)G(s)], \tag{2.13}$$

que é a solução da Equação 2.4.

Demonstração. A prova é imediata pelo Teorema 2.1. □

Veja que quando m é a função identidade, ou seja, $m(t) = t$, temos

$$F(s) = \frac{G(s)}{s},$$

de forma que $f(t) = \mathcal{L}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \int_0^t g(\tau)d\tau.$

Exemplo 2.1. *Seja $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $m(t) = e^t - 1$ e $g(t) = t^2 + t^3$.*

Se $f(t) = (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m$, então $F(s) = s\mathcal{L}[e^t - 1]\mathcal{L}[t^2 + t^3] = s\frac{1}{(s-1)s}\frac{2(s+3)}{s^4} = \frac{2(s+3)}{s^4(s-1)}$, ou seja, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s+3)}{s^4(s-1)}\right] = 2\left(-\frac{t^3}{2} - 2t^2 - 4t + 4e^t - 4\right)$.

A solução inversa da integral de Choquet, colocada pela Questão 2.1, conduz a um importante conceito no cálculo de Choquet, a saber, **a derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy**. Antes de definir essa derivada, vamos considerar a seguinte questão:

Seja f função contínua e não-decrescente com $f(0) = 0$ e uma medida fuzzy μ_m. Qual função contínua e não-decrescente g que satisfaz:

$$f(t) = (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m, \tag{2.14}$$

ou seja, qual a solução da equação integral neste caso?

Segundo o Teorema 2.1, quando $g \in \mathcal{F}^+$, a Equação 2.14 pode ser escrita como:

$$f(t) = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.15}$$

Supondo que cada uma das funções satisfaçam as condições do Teorema 2.1, aplicamos a transformada de Laplace em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{L}(f(t)) = s\mathcal{L}(m(t))\mathcal{L}(g(t))$$
$$F(s) = sM(s).G(s),$$

que nos leva a

$$G(s) = \frac{F(s)}{sM(s)}$$

e, portanto,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{sM(s)}\right]. \tag{2.16}$$

Podemos afirmar que a Equação 2.16 é a solução da equação integral 2.15 se $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{sM(s)}\right] \in \mathcal{F}^{+}$.

Essas primeiras condições sugerem a:

Definição 2.3. *Dada uma função contínua e não-decrescente $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, considere a equação integral de Choquet com relação a μ_m*

$$f(t) = f(0) + (C)\int_0^t g d\mu_m. \tag{2.17}$$

*A **derivada de f com relação à medida fuzzy** μ_m é definida pela solução g de 2.17, denotada por*

$$\frac{df(t)}{d\mu_m} = g(t), \tag{2.18}$$

se $g \in \mathcal{F}^{+}$.

Se tal função g existe, f é dita ser diferenciável com relação a μ_m ou simplesmente μ_m-diferenciável e g é chamada μ_m-derivada ou derivada de Choquet de f com relação a μ_m.

Note que no caso em que $m(t) = t$, $(C)\displaystyle\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t g(\tau)d\tau$ e, portanto,

$$\frac{df(t)}{d\mu_m} = \frac{df(t)}{dt}.$$

Considerando o caso em que $f(0) \geqslant 0$ e aplicando a transformada de Laplace na equação integral 2.17 escrita como

$$f(t) = f(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

obtemos,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + sM(s)G(s),$$

ou seja,

$$G(s) = \frac{sF(s) - f(0)}{s^2 M(s)}$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{sF(s) - f(0)}{s^2 M(s)}, \tag{2.19}$$

sempre que $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sF(s) - f(0)}{s^2 M(s)}\right] \in \mathcal{F}^+$.

2.2.1 Propriedades da Derivada de Choquet

A seguir enumeramos algumas propriedades da derivada de Choquet. Sejam $e, f \in \mathcal{F}^+$ e a uma constante positiva. Então valem:

1. $\dfrac{da}{d\mu_m} = 0$;
2. $\dfrac{dm}{d\mu_m} = 1$;
3. $\dfrac{d(af)}{d\mu_m} = a\dfrac{df}{d\mu_m}$;
4. $\dfrac{d(e+f)}{d\mu_m} = \dfrac{de}{d\mu_m} + \dfrac{df}{d\mu_m}$;
5. $\dfrac{df}{d\mu_{am}} = \dfrac{1}{a}\dfrac{df}{d\mu_m}$;
6. $m \leqslant n \Rightarrow \dfrac{df}{d\mu_m} \geqslant \dfrac{df}{d\mu_m}$.

Demonstração. 1. Seja $a = \displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + a$. Então $\displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = 0$, ou seja, $m'(t-\tau)g(\tau) = 0$ q.s. . Como $m'(t-\tau) > 0$, então $g(\tau) = 0$ q.s. em $[0, t]$. Por hipótese, g é contínua e, portanto, $g = \dfrac{da}{d\mu_m} = 0$ (função nula).

2. Se $m(t) = \displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau + \underbrace{m(0)}_{=0}$, e escrevendo

$m(t) = \displaystyle\int_0^t m'(u)du = \int_t^0 -m'(t-\tau)d\tau = \int_0^t m'(t-\tau)d\tau$, onde $u = t - \tau$ e $du = -d\tau$, então

$\displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)d\tau = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$, ou seja, $\displaystyle\int_0^t m'(t-\tau)(g(\tau)-1)d\tau = 0$.

Como $m'(t-\tau) > 0, \forall \tau \in [0, t]$, então $g(\tau) - 1 = 0$ q.s. . Como g é contínua,

$$g = \frac{dm}{d\mu_m} = 1.$$

3. De fato, quando $af(t) = af(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$, temos que $f(t) = f(0) - \int_0^t m'(t-\tau)\left(\frac{g(\tau)}{a}\right)d\tau$ e, por definição, $\frac{g(t)}{a} = \frac{df(t)}{d\mu_m}$, ou seja,

$$g = \frac{d(af)}{d\mu_m} = a\frac{df}{d\mu}.$$

4. Estamos procurando uma função g tal que $\frac{d(e+f)}{d\mu_m}(t) = g(t)$, ou seja,

$$(e+f)(t) = (e+f)(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$e(t) + f(t) = (e(0) + f(0)) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.20}$$

Assumindo que e e f sejam μ_m-diferenciáveis, podemos escrever $\frac{de}{d\mu_m} = g_1$ e $\frac{df}{d\mu_m} = g_2$. Daí,

$$e(t) = e(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g_1(\tau)d\tau \tag{2.21}$$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g_2(\tau)d\tau. \tag{2.22}$$

Somando 2.21 e 2.22:

$$e(t) + f(t) = (e(0) + f(0)) + \int_0^t m'(t-\tau)(g_1+g_2)(\tau)d\tau \tag{2.23}$$

Comparando as Equações 2.19 e 2.23, temos que

$$\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t m'(t-\tau)(g_1+g_2)(\tau)d\tau,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_0^t m'(t-\tau)\left(g - (g_1+g_2)\right)(\tau)d\tau = 0$$

, ou seja,

$$g(\tau) = g_1(\tau) + g_2(\tau), \tau \in [0,t],$$

já que $m'(t-\tau) > 0, \forall\tau \in [0,t]$ e $g - (g_1+g_2)$ é função contínua. Isso significa que

$$\frac{d(e+f)}{d\mu_m} = \frac{de}{d\mu_m} + \frac{df}{d\mu_m}.$$

5. Por definição, se $\dfrac{df(t)}{d\mu_{am}} = g(t)$ para qualquer $t > 0$, então

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \int_0^t (am)'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= f(0) + \int_0^t am'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= f(0) + \int_0^t m'(t-\tau)(ag(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{df(t)}{d\mu_m} = ag(\tau) = a\frac{df(t)}{d\mu_{am}}$$

e, portanto,

$$\frac{df}{d\mu_{am}} = \frac{1}{a}\frac{df}{d\mu_m}.$$

Essa igualdade significa que a derivada de uma função em relação a uma medida fuzzy μ_m multiplicada por um fator $a > 0$ tem seu valor aumentado (se $0 < a < 1$) ou diminuído (se $a > 1$) na proporção $\dfrac{1}{a}$.

6. Sejam $\dfrac{df}{d\mu_m} = g_1$ e $\dfrac{df}{d\mu_n} = g_2$, onde $m \leqslant n$.

As equações integrais equivalentes são dadas por:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \mu_m\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right) dr$$

e

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \mu_n\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right) dr.$$

Suponha que $g_1 < g_2$. Então,

$$\begin{aligned} &\mu_m\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right) = m(\lambda\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right)) \leqslant n(\lambda\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right)) \\ &< n(\lambda\left(\{\tau|g_2(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right)) = \mu_n\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right), \tau \in [0,t]. \end{aligned}$$

Com isso, $f(t) - f(0) = \mu_m\left(\{\tau|g_1(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]\right) dr <$ $\displaystyle\int_0^t \mu_n(\{\tau|g_2(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr = f(t) - f(0)$, ou seja, $f(t) < f(t)$, absurdo.

Portanto, $g_1 = \dfrac{df}{d\mu_m} \leqslant \dfrac{df}{d\mu_n} = g_2$.

$\square$

2.3 Cálculo de Choquet para funções não-crescentes

Na Seção 2.1 foi estudado o caso em que $g \in \mathcal{F}^+$. O Teorema 2.1 trata da integral de Choquet para esse caso. No entanto, é possível calcular a integral de Choquet de funções g positivas e não-crescentes com $g(0) < \infty$. Para isso, vamos começar com a integral de Choquet de funções **estritamente decrescentes**:

Proposição 2.4. *Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua e estritamente decrescente. Então a integral de Choquet de g com relação à medida fuzzy μ em $[0,t]$ é dada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau, \tag{2.24}$$

onde $\mu'([0,\tau]) = \dfrac{d\mu([0,\tau])}{d\tau}$. Mais ainda, para $\mu = \mu_m$,

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.25}$$

Demonstração.

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \leqslant r\} \cap [0,t])dr$$

$$\int_0^{g(t)} \mu([0,t])dr + \int_{g(t)}^{g(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr.$$

Fazendo a substituição $r = g(\tau)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\int_{g(t)}^{g(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr &= \int_t^0 \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau \\
&= -\int_0^t \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau \\
&= -\mu([0,\tau])g(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\
&= -\mu([0,t])g(t) + \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

onde $\mu'([0,\tau]) = \dfrac{d\mu}{d\tau}([0,\tau])$ e $\mu'([0,\tau]) \geqslant 0$ para $\tau \geqslant 0$. Assim,

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu_m = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.$$

Para $\mu = \mu_m$, já que $\mu'([0, \tau]) = m'(\tau)$, temos,

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu_m = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau.$$

□

Denotamos por $\mathcal{F}^-$ o conjunto das funções contínuas, mensuráveis, não-negativas e não-crescentes tais que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. A Proposição 2.4 garante que a integral de Choquet definida sobre o intervalo $[0, t]$ das funções estritamente decrescentes é uma integral de Riemann dada por 2.24. Em geral, para $g \in \mathcal{F}^-$ vale o seguinte:

Teorema 2.2. *Seja $g \in \mathcal{F}^-$, então a integral de Choquet de g em relação a uma medida fuzzy μ é representada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu = \int_0^t \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \tag{2.26}$$

Em particular, se $\mu = \mu_m$, então

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.27}$$

Demonstração.

Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua e não-crescente tal que

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ g_2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ g_3(t), & t_2 \leqslant t < \infty, \end{cases}$$

onde $g_1(t)$ e $g_3(t)$ são estritamente decrescentes, g_2 é constante e $g_1(t_1) = g_2 = g_3(t_2)$.

Seja

$$f(t) = \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0, t])dr.$$

(i) Para $0 \leqslant t < t_1$, vale

$$f(t) = \int_0^t \mu'([0, t])g_1(\tau)d\tau.$$

(ii) Para $t_1 \leqslant t < t_2$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{g(t)}^{g_1(t_1)} \mu([0,t])dr + \int_{g_1(t_1)}^{g_1(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr \\ &= \int_0^{g_2} \mu([0,t])dr + \int_{t_1}^{0} \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Reescrevendo $\int_{t_1}^0 \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau$ como $(\mu([0,\tau]g(\tau))\Big|_{t_1}^0 - \int_{t_1}^0 \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau$, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mu([0,t])g_2 + (\mu([0,\tau])g(\tau))\Big|_{t_1}^0 - \int_{t_1}^0 \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\ &= (\mu[0,t] - \mu([0,t_1]))g_1(t_1) - \int_0^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t} \mu'([0,\tau])g_2 d\tau + \int_0^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

(iii) Para $t_2 \leqslant t < \infty$, temos que:

$$f(t) = \int_0^{g_3(t_2)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr + \int_{g_3(t_2)}^{g_1(t_1)} \mu([t_1,t])dr + \int_{g_1(t_1)}^{g_1(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr.$$

Como $g_3(t_2) = g_1(t_1)$, então,

$$\int_{g_3(t_2)}^{g_1(t_1)} \mu([t_1,t])dr = \mu([t_1,t])(g_3(t_2) - g_1(t_1)) = 0.$$

Assim,

$$f(t) = \int_t^{t_2} \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau + \int_{t_1}^0 \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau.$$

Fazendo integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \left(\mu([0,\tau])g(\tau)d\tau \Big|_{t}^{t_2} - \int_{t}^{t_2} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \right) + \left(\mu([0,\tau])g(\tau) \Big|_{t_1}^{0} - \int_{t_1}^{0} \mu'([0,\tau])g(\tau) \right) \\
&= \mu([0,t_2])g(t_2) + \int_{t_2}^{t} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau - \mu(0,t_1)g(t_1) + \int_{0}^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mu'([0,\tau])g_2 d\tau + \int_{t_2}^{t} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
f(t) = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.
$$

Para $\mu = \mu_m$, e usando que $\mu'([0,\tau]) = m'(\tau)$,

$$
f(t) = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau.
$$

$\square$

Na Subseção 2.2.1 consideramos a derivada de uma função f em relação a μ_m apenas no caso em que $g = \dfrac{df}{d\mu_m}$ é positiva e crescente. No entanto, a solução do problema inverso pode ser discutida também quando $g \in \mathcal{F}^-$.

Assuma que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ seja contínua e não-crescente. Consideremos a equação integral de Choquet dada por:

$$
f(t) = f(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m, \tag{2.28}
$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é não-decrescente e diferenciável com relação a t.

Pelo Teorema 2.2, a Equação 2.28 pode ser escrita como

$$
f(t) = f(0) + \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau, \tag{2.29}
$$

de forma que $f'(t) = m'(t)g(t)$, e a solução da equação 2.29 é dada por $g(t) = \dfrac{f'(t)}{m'(t)}, t \in \mathbb{R}^+$.

Com isso, podemos escrever a seguinte

Definição 2.4. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável (com relação a t) e não-decrescente. Assumindo que a função g da equação integral*

$$f(t) = f(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m \tag{2.30}$$

seja não-crescente e contínua, então, pelo Teorema 2.2, a solução g de (2.21) é dada por

$$g = \frac{f'}{m'}. \tag{2.31}$$

*Quando g existe e $g(0) < \infty$, denominamo-la **derivada de f com relação à medida fuzzy μ_m** (ou derivada de Choquet de f com relação a μ_m). Podemos escrever*

$$\frac{df}{d\mu_m} = \frac{f'}{m'}, \tag{2.32}$$

e, neste caso, dizemos que f é μ_m-diferenciável.

A integral de Choquet das funções definidas em $\mathcal{F}^-$ e a derivada de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, como solução do problema inverso, contam com as mesmas propriedades elencadas nas subseções 2.1.1 e 2.2.1, respectivamente, relativas à integral e à derivada de funções em $\mathcal{F}^+$. As demonstrações por sua vez, são muito semelhantes. Vamos omiti-las neste caso para a fluidez da leitura do texto. A Tabela 2.3 sistematiza o Cálculo de Choquet para as funções tratadas neste capítulo.

Tabela 2 – Integrais e Derivadas de Choquet

$\boldsymbol{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+}$	$\boldsymbol{g \in \mathcal{F}^+}$	$\boldsymbol{g \in \mathcal{F}^-}$
$(C)\int_{[0,t]} g d\mu$	$-\int_0^t \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau$	$\int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau$
$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m$	$\int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$\int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau$
Solução de $f(t) = f(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m$	$\frac{df}{d\mu_m} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{sF(s) - f(0)}{s^2 M(s)}\right]$	$\frac{df}{d\mu_m} = \frac{f'}{m'}$

Exemplo 2.2. *[17] Dada $f(t) = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau$, sejam $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dadas por $m(t) = e^{at} - 1$ e $f(t) = e^{bt}$, com $a, b > 0$.*

Então $M(s) = \dfrac{a}{s(s-a)}$ *e* $F(s) = \dfrac{1}{s-b}$. *Como* $f(0) = 1$, *temos* $G(s) = \dfrac{sF(s)-1}{s^2M(s)} = \dfrac{b-a}{a(s-b)} + \dfrac{1}{s}$, *ou seja,* $g(t) = \dfrac{(b-a)}{a}e^{bt} + 1$. *Se* $b \geqslant a$, *então* g *é positiva, não-decrescente e contínua.*

Logo e^{bt} *é* μ_m*-diferenciável se* $b \geqslant a$ *e a derivada é dada por* $\dfrac{de^{bt}}{d\mu_m} = \dfrac{(b-a)}{a}e^{bt} + 1$.

Por outro lado, dada $f(t) = \displaystyle\int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau$, *temos que* $m'(t) = ae^{at}$ *e* $f'(t) = be^{bt}$. *Nesse caso, temos* $g(t) = \dfrac{b}{a}e^{b-a}t$, *onde* $g(0) < \infty$. *Assim, se* $a \geqslant b$, *então* g *é não decrescente e, portanto,* e^{bt} *é* μ_m*-diferenciável.*

Unindo os dois casos, calculamos a derivada de choquet $\dfrac{de^{bt}}{d\mu_m}$ *para* $m(t) = e^{at}-1$*:*

$$\frac{de^{bt}}{d\mu_m} = \begin{cases} \dfrac{b-a}{a}e^{bt} + 1, & se\ \ b \geqslant a \\ \dfrac{b}{a}e^{(b-a)t}, & se\ \ b < a. \end{cases} \tag{2.33}$$

2.4 Interpretações da Derivada de Choquet

Avaliar as relações algébricas entre a derivada usual e a derivada de Choquet de uma função parece ser uma maneira de relacionar o cálculo clássico e o cálculo de Choquet como ferramenta de resolução de processos biológicos. Em geral, ainda não é possível afirmar qual a interpretação geométrica da derivada de Choquet no plano cartesiano. No entanto, algumas famílias de funções, como a exponencial e a polinomial, possibilitam que essa análise seja feita sem muitas restrições analíticas.

Considere a equação integral de Choquet de $g \in \mathcal{F}^+$ em $[0,t]$ em relação a μ_m:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

cuja solução é dada por $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sF(s)-f(0)}{s^2M(s)}\right]$.

Utilizando o fato de que $\mathcal{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$, temos

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{1}{s^2M(s)}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right], \tag{2.34}$$

se $f \in \mathcal{F}^+$, vamos analisar alguns casos.

1. $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $m(t) = c(e^{at}-1)$, onde $a, c > 0$ são constantes;

Neste caso,

$$\mathcal{L}[m(t)] = c(\mathcal{L}[e^{at}] - \mathcal{L}[1]) = c\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right) = c\left(\frac{s-(s-a)}{s(s-a)}\right) = c\left(\frac{a}{s(s-a)}\right),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{1}{c}\left(\frac{s-a}{as}\right)\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right],$$

que é o mesmo que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{1}{ac}\left(1-\frac{a}{s}\right)L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]. \tag{2.35}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ac}\left(1-\frac{a}{s}\right)\right] = \frac{1}{a}\left(\mathcal{L}^{-1}[1] - a\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right) = \frac{1}{a}\left(\delta(t)-a\right),$$

onde $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função Delta de Dirac definida por

$$\delta(t) = \lim_{r\to 0} d_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & -r < t < r, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a equação 2.35 fica

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{ac}\left(\delta(t)-a\right)\right]\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right].$$

Pelo Teorema 1.4,

$$\frac{df}{d\mu_m}(t) = \int_0^t \frac{1}{ac}\left(\delta(t-\tau)-a\right)\left(\frac{df}{dt}(\tau)\right)d\tau$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mu_m}(t) &= \frac{1}{ac}\int_0^t \left(\delta(t-\tau)-a\right)\left(\frac{df}{dt}(\tau)\right)d\tau \\ &= \frac{1}{ac}\int_0^t \delta(t-\tau)\left(\frac{df}{dt}(\tau)\right)d\tau - \frac{1}{ac}\int_0^t af'(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{ac}\left(\frac{df}{dt}(t) - a(f(t)-f(0))\right). \end{aligned}$$

Logo, para a família de funções reais $\{m_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ definida por $m_c(t) = c(e^{at}-1), t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{df}{d\mu_m}(t) = \frac{1}{ac}\left(\frac{df}{dt}(t) - a(f(t)-f(0))\right). \tag{2.36}$$

Exemplo 2.3. *Sejam* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *e* $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *dadas por* $f(t) = e^{at}$*, com* $a = \dfrac{1}{2}$ *e* $m(t) = e^{bt} - 1$*, com* $b > 0$.

Para $b \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{df}{d\mu_m}$ *é dada pela Equação 2.36, ou seja,*

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\mu_m}(t) &= \frac{1}{b}\left(\frac{df}{dt}(t) - b(f(t) - f(0))\right)\\ &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - be^{\frac{t}{2}} + b\right]\\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2b} - be^{\frac{t}{2}} + 1.\end{aligned}$$

Para $b \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{df}{d\mu_m}(t) = \dfrac{f'(t)}{m'(t)} = \dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}}{be^{bt}} = \dfrac{1}{2b}e^{(\frac{1}{2}-b)t}$ *(Vide Exemplo 2.2)(Figura 1).*

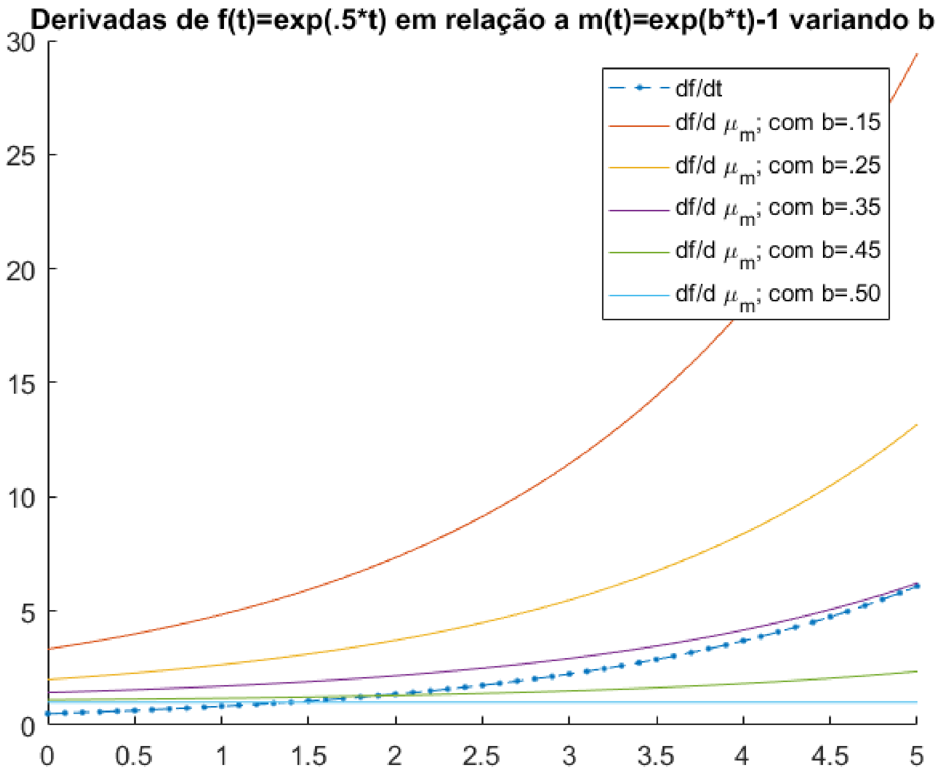

Figura 1 – Simulações para derivada de Choquet de $f(t) = e^{at}$ para $m(t) = e^{at} - 1$.

2. $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $m(t) = t^n$, onde n é um inteiro positivo.

   Neste caso, $\mathcal{L}[m(t)] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ e

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{1}{s^2\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right],$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \frac{s^{n-1}}{n!}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right].$$

Em geral, se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em n-ésima ordem, então vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n h^{(n)}(0)$.
Em particular, se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ for definida por $F(t) = e^{-st}$, então

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n.e^{-st(n)}(0) = (-1)^n.(-1)^n.s^n = s^n,\ n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^{n-1}}{n!}\right] = \dfrac{1}{n!}\mathcal{L}^{-1}\left[s^{n-1}\right] = \dfrac{\delta^{(n-1)}(t)}{n!}$.
Assim,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{d\mu_m}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\delta^{(n-1)}(t)}{n!}\right].\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right].$$

Pelo Teorema 1.4,

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{d\mu_m} &= \int_0^t \frac{\delta^{(n-1)}(t-\tau)}{n!}.\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^t \delta^{(n-1)}(t-\tau)\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{\tau=t}.(-1)^{n-1} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt^n}.(-1)^{n-1}. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. *Sejam* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *e* $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definidas por* $f(t) = e^t + t^8$ *e* $m(t) = t^n$*. Então* $\dfrac{df}{d\mu_m}(t) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n(e^t + t^8)}{dt^n}.(-1)^{n-1}$ *(Figura 2).*

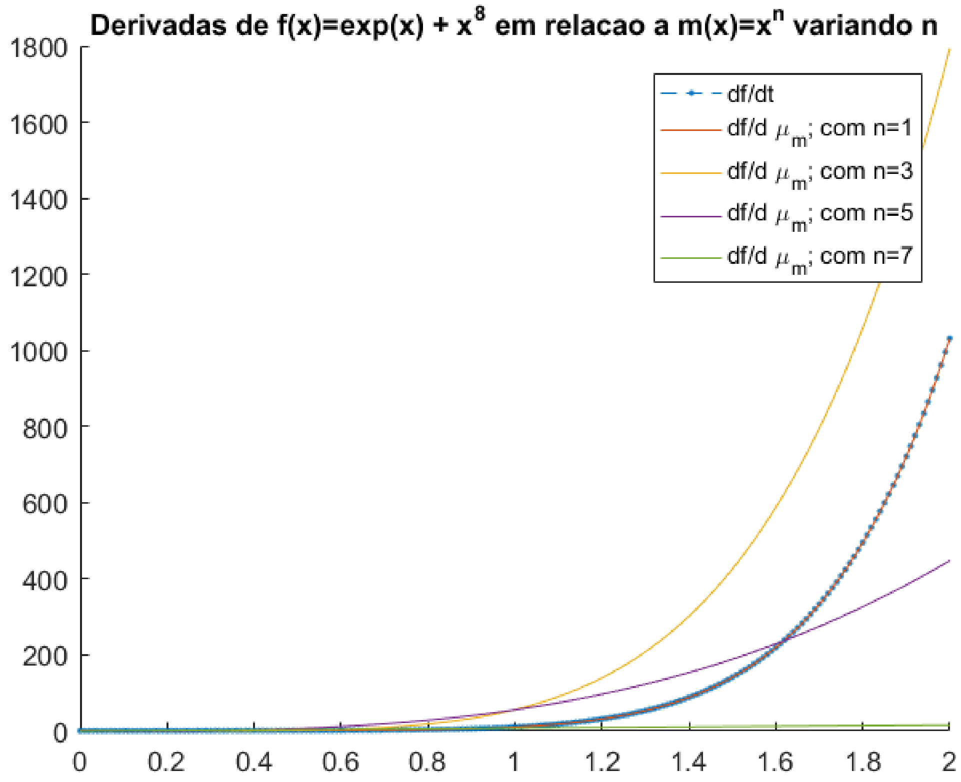

Figura 2 – Simulação para derivada de Choquet com $m(t) = t^n$.

3 Extensões do Cálculo de Choquet

Em [17], as bases do Cálculo de Choquet são construídas num estudo de caráter essencialmente teórico. A hipótese fundamental sobre a qual o autor trabalha é que as funções a serem integradas estão nos espaços $\mathcal{F}^+$ ou $\mathcal{F}^-$, ou seja, nos espaços de funções reais positivas monótonas não-decrescentes ou não-crescentes, respectivamente, como vimos no Capítulo 2. Considerando que a derivada de Choquet possa ser uma ferramenta para estudo de Problemas de Valor Inicial com essa ferramenta, julgamos pertinente considerar funções mais gerais a serem integradas, a saber, definidas em toda a reta real. Este capítulo trata essencialmente das extensões dos conceitos de integral de Choquet e derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy à funções reais monótonas. Para funções não-monotônicas, a representação do Cálculo de Choquet permanece em aberto.

3.1 Extensão da Integral de Choquet

Na Seção 2.1 estudamos a Integral de Choquet em relação à medida fuzzy μ das funções g positivas monótonas. Mais especificamente, das funções $g \in \mathcal{F}^+$ ou $\mathcal{F}^-$, como vimos nos Teoremas 2.1 e 2.2 O Teorema 2.1 garante que a Integral de Choquet de $g \in \mathcal{F}^+$ vale

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau \tag{3.1}$$

e o Teorema 2.2 garante que a Integral de Choquet de $g \in \mathcal{F}^-$ vale

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

No caso em que a medida fuzzy $\mu = \mu_m$, a equação 3.1 é uma convolução dada por

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

e a equação 3.2 é dada por

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

Os resultados obtidos para as funções em $\mathcal{F}^+$ e $\mathcal{F}^-$ no Capítulo 2 serão estendidos para funções reais monótonas crescentes e decrescentes neste capítulo. Para isso, vamos começar definindo dois espaços de funções.

Sejam $\mathcal{C}^+ = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, g$ é contínua, mensurável e não-decrescente$\}$ e $\mathcal{C}^-\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|g$ é contínua, mensurável e não-crescente$\}$.

De forma análoga à Proposição 2.1, começaremos tratando da Integral de Choquet das funções reais estritamente crescentes:

Proposição 3.1. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente com $-\infty < g(0) < g(t) < \infty$. Então a integral de Choquet de g em relação a μ em $[o, t]$ é representada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau. \tag{3.5}$$

Em particular, para $\mu = \mu_m$ temos:

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.6}$$

Demonstração.

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m$$

$$\overset{\text{def.2.1}}{=} \int_0^\infty \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr$$

$$= \int_0^{g(t)} \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{g(0)}^0 \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr$$

$$= \int_0^{g(t)} \mu([g^{-1}(r), t])dr + \int_{g(0)}^0 \mu([g^{-1}(r), t]) - \mu([0,t])dr$$

$$= \int_{g(0)}^{g(t)} \mu([g^{-1}(r), t])dr - \int_{g(0)}^0 \mu([0,t])dr.$$

Fazendo a substituição de variáveis $\tau = g^{-1}(r)$ na primeira integral, temos que:

$$\int_{g(0)}^{g(t)} \mu([g^{-1}(r), t])dr = \int_0^t \mu([\tau, t])g'(\tau)d\tau.$$

Escrevendo $\int_0^t \mu([\tau, t])g'(\tau)d\tau$ como $\mu([\tau, t])g(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau$ temos:

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu(\tau)$$

$$= \mu([\tau,t])g(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau + \mu([0,t])g(0)$$

$$= -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Em particular, quando $\mu = \mu_m$, $\mu'([\tau,t]) = \dfrac{d}{d\tau}m(t-\tau) = -m'(t-\tau)$ e, portanto,

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu_m(\tau) = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.8}$$

□

Logo, a integral de Choquet em relação a μ de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vale 3.7 (no caso em que $\mu = \mu_m$, a integral vale 3.8) quando g é **função real estritamente crescente**. Para o caso mais geral,onde g é **não-decrescente**, vale o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja $g \in \mathcal{C}^+$, então a integral de Choquet de g em relação a μ em $[0,t]$ é dada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} gd\mu = -\int_0^t \mu'(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

Em particular, para $\mu = \mu_m$ temos

$$(C)\int_{[0,t]} gd\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Demonstração.

Suponha, sem perda de generalidade, que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$\begin{cases} g_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ g_2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ g_3(t), & t_2 \leqslant t \leqslant t_3, \end{cases}$$

onde g_1 e g_3 são estritamente crescentes, g_2 é constante e $g_1(t_1) = g_2 = g_3(t_2)$.

Por hipótese, vamos considerar que $g(0) < 0 < g(t)$. Para o caso em que $g(0) < g(t) < 0$ a demonstração é análoga.

(i) Para $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $g \equiv g_1$, que é estritamente crescente. Pela Proposição 3.1,

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.$$

(ii) Para $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, temos

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\}\cap[0,t]) + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\}\cap[0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{g_1(t_1)} \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\})dr + \int_{g(0)}^0 \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\}) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_{g(0)}^{g_1(t_1)} \mu([g^{-1}(r),t])dr - \int_{g(0)}^0 \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{t_1} \mu([\tau,t])g'(\tau)d\tau - (\mu([0,t]).0 - \mu([0,t]).g(0)) \\
&= \mu([\tau,t])g(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau + \mu([0,t])g(0) \\
&= \mu([t_1,t])g(t_1) - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Note que $\mu([t_1,t])g(t_1) = \mu([t_1,t])g_2 = -\int_{t_1}^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau$. Logo,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= -\int_{t_1}^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau - \int_0^{t_1} \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau \\
&= -\int_0^t \mu'([\tau,t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

(iii) Para $t_2 \leqslant t < \infty$, temos:

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\cap[0,t]) + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\}\cap[0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{g_3(t)} \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\})\cap[0,t])dr + \int_{g(0)}^0 \mu(\{\tau|g(\tau)\geqslant r\}\cap[0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_{g(0)}^{g_3(t_2)} \mu([g^{-1}(r),t])dr + \int_{g_3(t_2)}^{g_3(t)} \mu([g^{-1}(r),t])dr - \int_{g(0)}^0 \mu([0,t])dr.
\end{aligned}$$

Como $g_3(t_2) = g_1(t_1)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{g(0)}^{g_3(t_2)} \mu([g^{-1}(r), t])dr &= \int_{g(0)}^{g_1(t_1)} \mu([g^{-1}(r), t]) \\
&= \int_0^{t_1} \mu([\tau, t])g'(\tau)d\tau \\
&= \mu([\tau, t])g(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau \\
&= \mu([t_1, t])g_2 - \mu([0, t])g(0) - \int_0^{t_1} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Ao mesmo tempo,

$$\begin{aligned}
\int_{g_3(t_2)}^{g_3(t)} \mu([g^{-1}(r), t])dr &= \int_{t_2}^{t} \mu([\tau, t])g'(\tau)d\tau \\
&= \mu([\tau, t])g(\tau)\Big|_{t_2}^{t} - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau \\
&= -\mu([t_2, t])g_2 - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} gd\mu = \mu([t_1, t])g_2 - \mu([0, t])g(0) - \int_0^{t_1} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau \\
- \mu([t_2, t])g_2 - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau \\
- \int_{g(0)}^{0} \mu([0, t])dr \\
= \mu([t_1, t])g_2 - \int_0^{t_1} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau - \mu([t_2, t])g_2 - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

onde $\mu([t_1, t])g_2 - \mu([t_2, t])g_2 = -\int_{t_1}^{t_2} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} gd\mu &= -\int_0^{t_1} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau - \int_{t_2}^{t} \mu'([\tau, t])g(\tau)d\tau \\
&= -\int_0^{t} \mu'(t-\tau)g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Para $\mu = \mu_m$, temos

$$(C)\int_{[0,t]} gd\mu = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

□

Note que $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{C}^+$, ou seja, o Teorema 3.1 estende o Teorema 2.2 para as funções reais contínuas e não-decrescentes.

De forma análoga à Proposição 3.1, a Integral de Choquet de função reais estritamente decrescentes pode ser estudada como uma integral de Riemann. É o que garante a seguinte:

Proposição 3.2. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função estritamente decrescente com $g(0) < \infty$. Então a integral de Choquet de g em relação a μ em $[0,t]$ é dada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} gd\mu = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

Mais ainda, para $\mu = \mu_m$

$$(C)\int_{[0,t]} gd\mu_m = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.12}$$

Demonstração.

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\mu(\tau)$$

$$= \int_0^\infty \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr$$

$$\int_0^{g(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr + \int_{g(t)}^0 \mu([0,g^{-1}(r)] - [0,t])dr + \int_{-\infty}^{g(t)} \mu(\{\tau|g(\tau) \geqslant r \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr$$

$$= \int_{g(t)}^{g(o)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr - \int_{g(t)}^0 \mu([0,t])dr + \int_{-\infty}^{g(t)} \mu([0,t]) - \mu([0,t])dr.$$

Fazendo a substituição de variáveis $\tau = g^{-1}(r)$, temos que $dr = g'(\tau)d\tau$ e, portanto:

$$\int_{g(t)}^{g(0)} \mu([0,g^{-1}(r)])dr = \int_t^0 \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau.$$

Escrevendo esta última integral como $\mu([0,\tau])g(\tau)\Big|_t^0 + \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau$, temos que:

$$\begin{aligned}
&(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\tau \\
&= \mu([0,\tau])g(\tau)\Big|_t^0 + \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau + \mu([0,t])g(t) \\
&= -\mu([0,t])g(t) + \int_0^t \mu'([0,\tau])d\tau + \mu([0,t])g(t) \\
&= \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Em particular, quando $\mu = \mu_m$, temos que $\dfrac{d}{d\tau}\mu([0,\tau]) = m'(\tau)$ e, portanto,

$$(C)\int_{[0,t]} g(\tau)d\tau = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau.$$

□

Logo, a integral de Choquet de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em relação a μ vale 3.11 (quando $\mu = \mu_m$, a integral vale 3.12) quando g é função real **estritamente decrescente**. Para o caso mais geral, quando g é **não-crescente** vale o seguinte:

Teorema 3.2. *Seja $g \in \mathcal{C}^-$. A integral de Choquet de g em relação a μ em $[0,t]$ é dada por:*

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \tag{3.13}$$

Em particular, para $\mu = \mu_m$,

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.14}$$

Demonstração.

Suponha, sem perda de generalidade, que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$\begin{cases} g_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ g_2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ g_3(t), & t_2 \leqslant t \leqslant t_3, \end{cases}$$

onde g_1 e g_3 são estritamente decrescentes, g_2 é constante e $g_1(t_1) = g_2 = g_3(t_2)$.

Por hipótese, vamos considerar que $g(0) > 0 > g(t)$. Para o caso em que $g(t) < g(0) < 0$ a demonstração é análoga.

(i) Para $0 < t \leqslant t_1$, $g \equiv g_1$, que é estritamente decrescente. Pela Proposição 3.1, vale

$$(C)\int_{[0,t]} g d\mu = -\int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.$$

(ii) Para $t_1 < t \leqslant t_2$, temos

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t])dr + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{g(0)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr + \int_{g_1(t_1)}^0 \mu([0, g^{-1}(r)]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_{g_1(t_1)}^{g(0)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr - \int_{g_1(t_1)}^0 \mu([0,t])dr \\
&= -\int_0^{t_1} \mu([0,\tau])g'(\tau)d\tau + \mu([0,t])g_1(t_1) \\
&= -\left(\mu([0,\tau])g(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau\right) + \mu([0,t])g_1(t_1) \\
&= -\mu([0,t_1])g_1(t_1) + \int_0^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau + \mu([0,t_1])g_1(t_1).
\end{aligned}$$

Note que $\mu([0,t])g_1(t_1) - \mu([0,t_1])g_1(t_1) = \int_{t_1}^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau$.

Logo,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^{t_1} \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \mu'([0,\tau])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

(iii) Para $t_2 < t < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r \cap [0,t]) + \int_{-\infty}^0 \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{g(0)} \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\}) \cap [0,t])dr + \int_{g(t)}^0 \mu(\{\tau | g(\tau) \geqslant r\} \cap [0,t]) - \mu([0,t])dr \\
&= \int_0^{g(0)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr + \int_{g_3(t)}^{g_3(t_2)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr + \int_{g_3(t_2)}^{g(0)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr \\
&= -\int_{g(t)}^0 \mu([0,t])dr.
\end{aligned}$$

Como $g_3(t_2) = g_1(t_1)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{g_3(t_2)}^{g(0)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr &= \int_{g_1(t_1}^{g(0))} \mu([0, g^{-1}(r)]) \\
&= -\int_0^{t_1} \mu([0, \tau])g'(\tau)d\tau \\
&= -\left(\mu([0, \tau])g(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \right) \\
&= -\mu([0, t_1])g_2 + \int_0^{t_1} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Ao mesmo tempo,

$$\begin{aligned}
\int_{g_3(t)}^{g_3(t_2)} \mu([0, g^{-1}(r)])dr &= \int_t^{t_2} \mu([0, \tau])g'(\tau)d\tau \\
&= -\left(\mu([0, \tau])g(\tau)\Big|_{t_2}^{t} - \int_{t_2}^{t} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \right) \\
&= -\mu([0, t])g(t) + \mu([0, t_2])g_2 + \int_{t_2}^{t} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu = &-\mu([0, t])g(t) + \mu([0, t_2])g_2 + \int_{t_2}^{t} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \\
&- \mu([0, t_1])g_2 + \int_0^{t_1} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \\
&- \int_{g(t)}^{0} \mu([0, t])dr \\
&= \mu([0, t_1])g_2 + \int_0^{t_1} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau + \mu([0, t_2])g_2 + \int_{t_2}^{t} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

onde $-\mu([0, t_1])g_2 + \mu([0, t_2])g_2 = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} g d\mu &= -\int_0^{t_1} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau + \int_{t_2}^{t} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mu'([0, \tau])g(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{t} \mu'(\tau)g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

□

Note que $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-} \subset \boldsymbol{\mathcal{C}}^{-}$, ou seja, o Teorema 3.2 estende o Teorema 2.2 para as funções reais contínuas e não-crescentes.

3.1.1 Propriedades da extensão da Integral de Choquet

Assim como para as funções em $\mathcal{F}^{+}$ ou em $\mathcal{F}^{-}$, a integral de Choquet das funções em $\mathcal{C}^{+}$ ou $\mathcal{C}^{-}$ possuem as seguintes propriedades:

Sejam $a \in \mathbb{R}$ uma constante e $g, h \in \mathcal{C}^{+}$ (ou $\mathcal{C}^{-}$, exclusivamente). Então vale que:

1. $(C)\displaystyle\int_{[0,t]} a d\mu_m = am(t)$;
2. $(C)\displaystyle\int_{[0,t]} ag d\mu_m = a\left((C)\int_{[0,t]} g d\mu_m\right)$;
3. $(C)\displaystyle\int_{[0,t]} (g+h) d\mu_m = (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m + (C)\int_{[0,t]} h d\mu_m$;
4. $(C)\displaystyle\int_{[0,t]} g d\mu_{am} = a\left((C)\int_{[0,t]} g d\mu_m\right)$;
5. $\displaystyle\int_{[0,t]} g d\mu_{m+n} = (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m + (C)\int_{[0,t]} d\mu_n$;
6. $g \leqslant h \Rightarrow (C)\displaystyle\int_{[0,t]} g d\mu_m \leqslant (C)\int_{[0,t]} h d\mu_m$.
7. $m \leqslant n \Rightarrow (C)\displaystyle\int_{[0,t]} g d\mu_m \leqslant (C)\int_{[0,t]} g d\mu_n$;
8. $t_1 \leqslant t_2 \Rightarrow (C)\displaystyle\int_{[0,t_1]} g d\mu_m \leqslant (C)\int_{[0,t_2]} g d\mu_n$.

3.2 Extensão da derivada de Choquet

No Capítulo 2, a derivada de f em relação a uma medida μ_m como operação inversa da integral de Choquet foi definida apenas no espaço das funções positivas e crescentes, ou seja, dada a equação integral

$$f(t) = f(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m, \tag{3.15}$$

para que $g = \dfrac{df}{d\mu_m}$ exista, foi necessário que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fosse crescente (Definição 2.3 e Definição 2.4).

Na Seção 3.1 passamos a considerar a Integral de Choquet de funções reais monótonas em geral. Associar a essa extensão a derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com relação a μ_m induz à seguinte:

Questão 3.1. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e uma medida fuzzy μ_m, é possível encontrar uma função contínua g que satisfaça 3.15?*

Para isso, vamos fazer a seguinte:

Definição 3.1. *Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere a seguinte equação integral de Choquet em relação a μ_m:*

$$f(t) = f(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m. \tag{3.16}$$

*A **derivada de f em relação à medida fuzzy μ_m** é definida pela solução g da equação 3.16, denotada por:*

$$\frac{df}{d\mu_m} = g, \tag{3.17}$$

se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for monótona (não-crescente ou não-decrescente). Nesse caso, dizemos que f é diferenciável em relação a μ_m ou μ_m-diferenciável e g é chamada derivada de Choquet de f.

Exemplo 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 3t^2 - t^3$ e $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $m(t) = e^t - 1$. Considere a Equação 3.16 escrita como*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Na Seção 2.2 mostramos que se g existe, então $g = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sF(s) - f(0)}{s^2 M(s)}\right]$. Como $F(s) = \dfrac{6(s-1)}{s^4}$ e $M(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$, então

$$g = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6(s-1)^2}{s^4}\right] = t^3 - 6t^2 + 6t,$$

que é crescente em $(-\infty, 3-\sqrt{3}) \cap (3+\sqrt{3}, \infty)$ e decrescente em $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. Como g não é monótona, segue que f não é μ_m-diferenciável.

Exemplo 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{-t}(t+1)$ e $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $m(t) = t^2 + t^3$. Considere a equação 3.16 escrita como*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau, \tag{3.18}$$

cuja solução $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(t) = \dfrac{f'(t)}{m'(t)} = \dfrac{-e^{-t}t}{2t+3t^2}$, que é monótona decrescente e, portanto, solução da Equação 3.16. Logo, $\dfrac{df}{d\mu_m} = g$ e f é μ_m-diferenciável.

3.2.1 Propriedades da extensão da Derivada de Choquet

A derivada de Choquet das funções em reais possuem as seguintes propriedades:

Sejam $a \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha $e, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_m-diferenciáveis. Então valem

1. $\dfrac{da}{d\mu_m} = 0$;
2. $\dfrac{daf}{d\mu_m} = a\dfrac{df}{d\mu_m}$;
3. $\dfrac{d(e+f)}{d\mu_m} = \dfrac{de}{d\mu_m} + \dfrac{df}{d\mu_m}$;
4. $\dfrac{df}{d\mu_{am}} = \dfrac{1}{a}\dfrac{df}{d\mu_m}$;
5. $\dfrac{dm}{d\mu_m} = 1$;
6. $m \leqslant n \Rightarrow \dfrac{df}{d\mu_m} \geqslant \dfrac{df}{d\mu_n}$;

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item 1. Os itens 2 a 5 são demonstrados de forma análoga.

1. $\dfrac{da}{d\mu_m} = 0$;

   Seja $f \equiv a$, com $a \in \mathbb{R}$ constante e $\dfrac{da}{d\mu_m} = g$ para alguma $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Se $\dfrac{da}{d\mu_m} = g$, então vale

$$a = a + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m \tag{3.19}$$

e, portanto, $(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = 0$. Pela Definição 3.1, g é solução da equação 3.19 se for monótona. Existem duas possibilidades:

- g é não-decrescente: neste caso, $(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(t-\tau)g(\tau)d\tau = 0$, ou seja, $g \equiv 0$.
- g é não-crescente: neste caso, $(C)\int_{[0,t]} g d\mu_m = \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau = 0$, ou seja, $g \equiv 0$.

Logo, $\dfrac{da}{d\mu_m} = g = 0$.

$\square$

4 Equações Diferenciais com Cálculo de Choquet e Aplicações

Neste capítulo procuramos utilizar os teoremas e propriedades do Cálculo de Choquet para procurar soluções de modelos populacionais encontrados na literatura. Do ponto de vista teórico, é possível fazer um paralelo entre as equações diferencias clássicas e as equações diferenciais escritas com a derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy, aqui denominada derivada de Choquet, uma vez tendo sido definida como a solução do problema inverso da equação integral de Choquet. As soluções encontradas para os Problemas de Valor Inicial com derivada de Choquet são representadas por curvas distintas às das soluções dos PVIs clássicos. Do ponto de vista das aplicações, a função m, definida na reta real positiva, quando interpretada como fator biológico, alia ao Cálculo de Choquet a potencialidade de atribuir significado às modelagens feitas por meio dos seus Problemas de Valor Inicial.

4.1 Equações diferenciais

Aplicando o conceito de derivada de uma função com relação a uma medida fuzzy, aqui denominada derivada de Choquet, Sugeno [17] explora a possibilidade de lidar com equações diferenciais de funções monótonas positivas.

A priori, a equação diferencial de crescimento malthusiano escrita nesses moldes é dada por

$$\frac{dy}{d\mu_m}(t) = ay(t),\ a > 0 \tag{4.1}$$

,

onde supomos uma condição inicial dada por $y(0) = 1$.

Pela definição de $\dfrac{dy}{d\mu_m}$, a equação 4.1 é equivalente à equação integral de Choquet dada por

$$y(t) = y(0) + (C)\int_{[0,t]} ay d\mu_m, \tag{4.2}$$

de forma que, se $y(\tau) > 0$ para $\tau \in [0, t]$, então y é estritamente crescente. Pelo Teorema 2.1, a equação 4.2 pode ser reescrita como

$$y(t) = 1 + \int_0^t m'(t-\tau)ag(\tau)d\tau, \tag{4.3}$$

cuja solução é encontrada via Transformada de Laplace.

Sejam $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e $M(s) = \mathcal{L}[m(t)]$. Então, pelo Teorema 2.1,

$$Y(s) = \frac{1}{s} + sM(s)aY(s),$$

ou seja, $Y(s) = \dfrac{1}{s(1-asM(s))}$ e, portanto,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1-asM(s))}\right]. \tag{4.4}$$

A função y da Equação 4.4 é denominada **função m-exponencial** e denotada por $y(t) = e_m^{at}$, de onde se escreve a seguinte:

Definição 4.1. *[17] A função m-exponencial, denotada por e_m^{at}, é definida pela solução da equação diferencial com condição inicial dada por*

$$\frac{dy}{d\mu_m}(t) = ay(t),\ a > 0\ com\, y(0) = 1, \tag{4.5}$$

se for positiva, ou seja, se $y(t) > 0$, $\forall t \geqslant 0$.

Como consequência da Equação 4.4 e da Definição 4.1, temos a seguinte:

Proposição 4.1. *[17] A função m-exponencial possui as seguintes propriedades:*

1. $e_m^0 = 1$;
2. $\dfrac{de_m^{at}}{d\mu_m} = ae_m^{at}$;
3. e_m^{at} *é estritamente crescente.*

Demonstração. A demonstração é imediata. □

Da Equação 4.4, temos que, no caso em que $m(t) = t$, então $e_m^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, ou seja, a função m-exponencial é uma extensão da função exponencial clássica, já que diferentes funções m geram diferentes soluções da Equação 4.1 com as propriedades elencadas na Proposição 4.1.

Consideremos agora uma equação diferencial de segunda ordem homogênea da forma

$$A\frac{d^2y(t)}{d{\mu_m}^2} + B\frac{dy(t)}{d\mu_m} + Cy(t) = 0, \tag{4.6}$$

onde $y(0) = y_0$ e $\dfrac{dy}{d\mu_m}(0) = \dfrac{dy_0}{d\mu_m}$ e $A, B, C \in \mathbb{R}$ são constantes.

Assumindo que a solução é uma função m-exponencial, ou seja, é da forma $y(t) = e_m^{at}$, e substituindo na Equação 4.6, temos

$$A\frac{d^2(e_m^{at})}{d{\mu_m}^2} + B\frac{d(e_m^{at})}{d\mu_m} + Ce_m^{at} = 0$$

ou seja,

$$Aa^2e_m^{at} + Bae_m^{at} + Ce_m^{at} = 0$$

e, portanto, $e_m^{at}(Aa^2 + Ba + C) = 0$. Como $e_m^{at} \neq 0$, temos

$$Aa^2 + Ba + C = 0. \tag{4.7}$$

Os valores de a que satisfazem a Equação 4.7, digamos a_1 e a_2 determinam a solução geral de 4.6 dada por

$$y(t) = e_m^{a_1t} + e_m^{a_2t}, \tag{4.8}$$

se as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dfrac{dy}{d\mu_m}(0) = \dfrac{dy_0}{d\mu_m}$ forem satisfeitas.

Exemplo 4.1. *Considere a equação diferencial de segunda ordem homogênea dada por*

$$2\frac{d^2y(t)}{d{\mu_m}^2} + 5\frac{dy(t)}{d\mu_m} - 3\frac{dy}{d\mu_m}(t) = 0, \tag{4.9}$$

com condições iniciais $y(0) = 2$ *e* $\dfrac{dy(0)}{d\mu_m} = -\dfrac{5}{2}$.

Por hipótese, $y = e_m^{at}$ *e, portanto, por* (4.7)*, vale que*

$$2a^2 + 5a - 3 = 0,$$

cujas raízes são $a = \dfrac{1}{2}$ *e* $a = -3$. *Assim, a solução geral de 4.9 é dada por*

$$y(t) = e_m^{\frac{t}{2}} + e_m^{-3t}, \tag{4.10}$$

já que $y(0) = e_m^0 + e_m^0 = 2$ *e* $\dfrac{dy}{d\mu_m}(0) = \dfrac{1}{2}e_m^0 - 3e_m^0 = -\dfrac{5}{2}$.

4.2 Método Numérico

Embora a Transformada de Laplace seja uma ferramenta bastante útil na procura por soluções de equações diferenciais com derivada de Choquet, muitas vezes não é possível utilizá-la apenas com as propriedades conhecidas. Por exemplo, a dinâmica populacional de Von Bertalanffy [18] descrita por

$$\frac{dN(t)}{dt} = \zeta N^{\varphi} - \rho N^{\varepsilon} \tag{4.11}$$

com $N(0) = N_0$ e $\zeta, \rho, \varphi, \varepsilon$ constantes positivas, possui equação diferencial com derivada de Choquet análoga dada por

$$\frac{dN(t)}{d\mu_m} = \zeta N^{\varphi} - \rho N^{\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Como $\zeta N^{\varphi} - \rho N^{\varepsilon}$ é crescente [18], a equação integral equivalente à Equação 4.12 é

$$N(t) = N_0 + \int_0^t m'(t-\tau)\left(\zeta N^{\varphi}(\tau) - \rho N^{\varepsilon}(\tau)\right) d\tau. \tag{4.13}$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(N(t)) &= \frac{N_0}{s} + sM(s)\mathcal{L}\left(\zeta N^{\varphi}(t) - \rho N^{\varepsilon}(t)\right) \\
\mathcal{L}(N(t)) &= \frac{N_0}{s} + sM(s)\left(\mathcal{L}\left(\zeta N^{\varphi}(t)\right) - \mathcal{L}\left(\rho N^{\varepsilon}(t)\right)\right) \\
\mathcal{L}(N(t)) &= \frac{N_0}{s} + sM(s)\left(\zeta\mathcal{L}(N^{\varphi}(t)) - \rho\mathcal{L}(N^{\varepsilon}(t)\right).
\end{aligned}$$

Neste caso, os termos $\mathcal{L}(N^{\varphi}(t))$ e $\mathcal{L}(N^{\varepsilon}(t)$ não são trivialmente calculáveis para N qualquer, ou seja, a transformada de Laplace não é uma saída viável para encontrar as soluções da equação integral de Choquet. Para um campo de crescimento qualquer, é possível aplicar o seguinte método:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável cuja representação é uma dinâmica populacional de $y = y(t)$, crescente em t, isto é, $\frac{d}{dt}\left(f(y(t))\right) > 0$. Uma equação diferencial cuja derivada está definida em relação a μ_m em $[0, t] \subseteq \mathbb{R}$ dada por

$$\frac{d(y(t))}{d\mu_m} = f(y(t)) \tag{4.14}$$

possui equação integral de Choquet equivalente

$$y(t) = y(0) + \int_0^t m'(t-\tau) f(y(\tau)) d\tau, \tag{4.15}$$

onde $y(0) \geqslant 0$.

Seja $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ uma partição de $[0, t]$ onde $t_i - t_{i-1} = h$ $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. A representação discreta da equação integral 4.15 é dada por

$$y(t_n) = y(0) + \int_0^{t_n} m'(t_n - s) f(y(s)) ds$$

$$= y(0) + \int_0^{t_1} m'(t_n - s) f(y(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} m'(t_n - s) f(y(s)) ds + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} m'(t_n - s) f(y(s)) ds.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ existe $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} m'(t_n - s) f(y(s)) ds &= m'(t_n - c_i) f(y(c_i))(t_i - t_{i-1}) \\ &= m'(t_n - c_i) f(y(c_i)) h. \end{aligned}$$

Fazendo $c_i \cong t_{i-1}$ e escrevendo $f(t_i) = x_i$ temos:

$$\begin{aligned} y(t_n) &\cong y(0) + hm'(t_n - t_0) f(y(t_0)) + \ldots + hm'(t_n - t_{n-1}) f(y(t_{n-1})) && (4.16) \\ &= y(0) + h \sum_{i=0}^{n-1} m'(t_n - t_i) f(x_i) && (4.17) \\ &= y(0) + h \sum_{i=0}^{n-1} m'((n-1)h) f(x_1) = \overline{y}(t_n). && (4.18) \\ & && (4.19) \end{aligned}$$

Localmente, o erro de aproximação é dado por:

$$\left\| m'(t_n - c_i).f(y(t_n - c_i))h - m'(t_n - t_{i-1}).f(y(t_n - t_{i-1}))h \right\| =$$

$$\left\| hm'(t_n - c_i) \left(f(y(t_n - c_i)) - \frac{m'(t_n - t_{i-1})}{m'(t_n - c_i)} .f(y(t_n - t_{i-1})) \right) \right\| \leqslant$$

$$\left\| hm'(t_n - c_i) \right\| \left\| f(y(t_n - c_i)) - \frac{m'(t_n - t_{i-1})}{m'(t_n - c_i)} .f(y(t_n - t_{i-1})) \right\| \leqslant$$

$$\|m'\|\left\|f(y(t_n-c_i))\left(1-\frac{m'(t_n-t_{i-1})}{t_n-c_i}\frac{f(y(t_n-t_{i-1}))}{f(y(t_n-c_i))}\right)\right\| \leqslant$$
$$h\|m'\|\|f\|\left\|1-\frac{m'(t_n-t_{i-1})}{t_n-c_{i-1}}\frac{f(y(t_n-t_{i-1}))}{f(y(t_n-c_i))}\right\|.$$

Para $h \to 0$, $\dfrac{m'(t_n-t_{i-1})}{t_n-c_i}\dfrac{f(y(t_n-t_{i-1}))}{f(y(t_n-c_i))} \cong \dfrac{m'(t_n-t_{n-1})}{t_n-c_n}\dfrac{f(y(t_n-t_{n-1}))}{f(y(t_n-c_n))}$

onde $1 \leqslant i \leqslant n-1$. No caso em que $i = n$, a expressão

$$\frac{m'(t_n-t_{n-1})}{t_n-c_n}\frac{f(y(t_n-t_{n-1}))}{f(y(t_n-c_{(n-1)}))} = \frac{m'(h)}{m'(h-\epsilon)}\frac{f(y(h))}{f(y(h-\epsilon))}.$$

Reescrevendo $\left\|1-\dfrac{m'(h)}{m'(h-\epsilon)}\dfrac{f(y(h))}{f(y(h-\epsilon))}\right\|$ como $g_h(\epsilon)$, temos que

$$O(E_L) = h\|m'\|\|f\|g_h(\epsilon),$$

onde $g_h(\epsilon) \xrightarrow{h\to 0} 0$, $\epsilon \in [0,h]$.

Globalmente,

$$O(E) = n\,(h.\|m'\|\|f\|)\,g_h = t.\,(\|m'\|\|f\|)\,g_h = t\|m'\|\|f\|O(g_h).$$

Como $t \in \mathbb{R}^+$ é fixo, $\left\|y(t)-\overline{y}(t)\right\| \to 0$.

Exemplo 4.2. *(Simulações com o Modelo de crescimento de Von Bertalanffy)*

Para as simulações, consideremos a equação diferencial com derivada de Choquet 4.12 dada por

$$\frac{dN(t)}{dt} = \zeta N^{\varphi} - \rho N^{\varepsilon},$$

ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(N(t)) = \zeta N^{\varphi}(t) - \rho N^{\varepsilon}(t)$.

A Figura 4.2 representa as curvas de crescimento para diferentes valores das soluções da Equação 4.11, considerando $\zeta = 1$, $\rho = 0,1$, $\phi = \dfrac{2}{3}$ *e* $\xi = 1$.

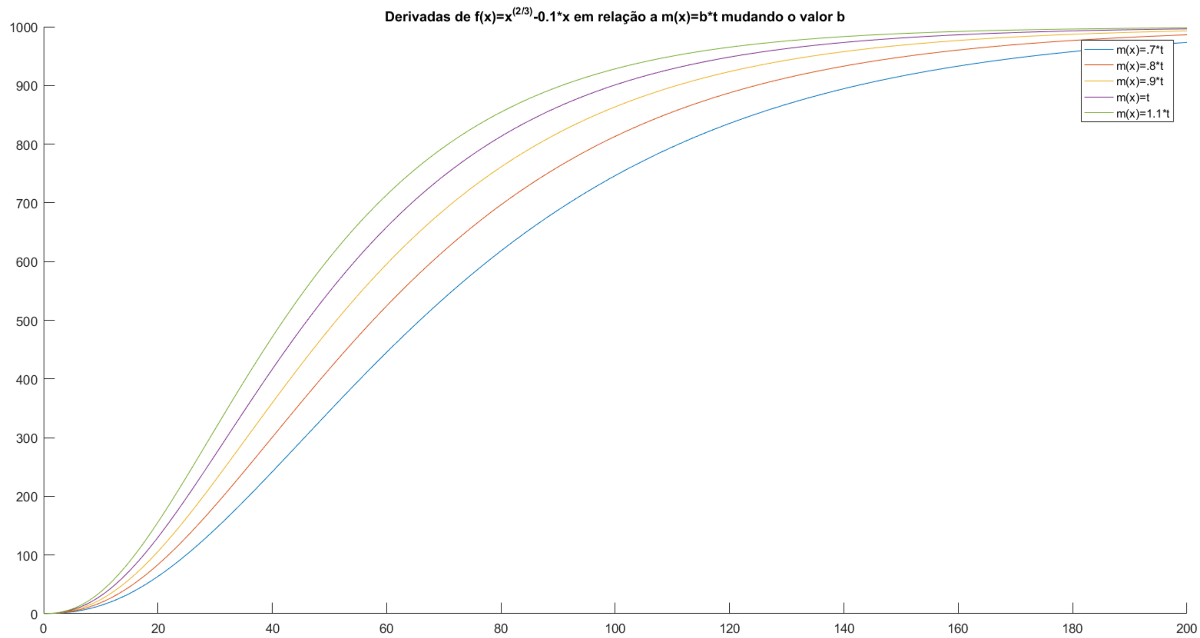

Figura 3 – Soluções do modelo de Von Bertalanffy para diferentes funções m

4.3 Aplicações

4.3.1 Dinâmica de transferência HIV

A Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) foi reconhecida em meados de 1981, nos EUA, como uma nova doença que compromete o sistema imunológico. Segundo a Organização Mundial da Saúde, no final de 2015 aproximadamente 36,7 milhões de pessoas conviviam com o HIV no mundo inteiro. Um longo processo biológico é registrado entre o momento em que o organismo humano entra em contato com o HIV (Human Immunodeficiency Virus) e a manifestação da doença. O processo de imunodeficiência é, portanto, um processo temporal e que varia de pessoa para pessoa.

O HIV pertence à grande família de retrovírus *(Retrovridae)*, da qual fazem parte o HIV1 e o HIV2, com vários subtipos para cada um deles). Em média, existe um período de 10 anos entre a infecção com o HIV1 e a manifestação da AIDS. Devido à afinidade do HIV com as células do sistema imunológico chamadas linfócitos T CD4+, observa-se uma queda acentuada da imunidade do soropositivo, que vem acompanhada de perda de peso e das "infecções oportunistas"[4]

Embora existam muitas categorias clínicas para o diagnóstico, quando a contagem das células T CD4+ chega a $200/\mu L$ ou abaixo, o paciente é caracterizado por ter AIDS. Em pacientes saudáveis, os níveis sanguíneos das células T CD4+ giram em torno de $1000/\mu L$ e são rapidamente reabastecidas pelo organismo. As razões para a queda na contagem de células T no organismo portador do HIV ainda são desconhecidas, já que apenas uma fração delas (10^{-4} ou 10^{-5}) é infectada em algum momento [11].

As razões para esse intervalo de tempo entre o contato com o HIV e o aparecimento dos sintomas da AIDS são desconhecidos. O esgotamento das células T CD4+ tem efeitos amplos e prejudiciais no funcionamento do sistema imune como um todo é leva à imunodeficiência que caracteriza a AIDS.

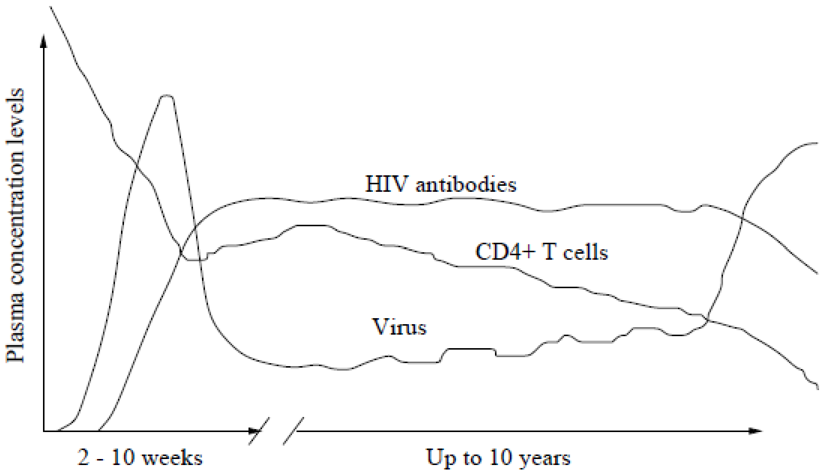

Figura 4 – Percurso temporal da infecção do HIV num adulto típico [14]

Desde meados dos anos 80, muitos modelos determinísticos e estocáticos vêm sendo desenvolvidos para descrever o sistema imune e sua interação com o HIV. O primeiro modelo matemático de Anderson (1986) estabelece que a taxa de conversão (λ) da infecção para AIDS em função do tempo„ na história natural do HIV, seria a tranferência da fase assintomática para sintomática.

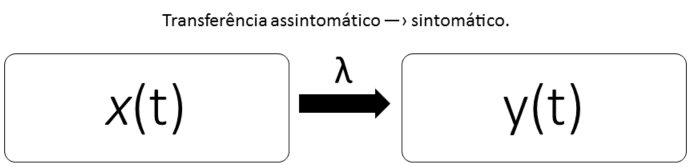

Figura 5 – Dinâmica de transferência entre soropositivos [1]

Note que, sendo λ a taxa de transferência entre os estados, $\frac{1}{\lambda}$ é o tempo médio com que os indivíduos permanecem assintomáticos.

Representando a fração de indivíduos infectados por x, mas que ainda não desenvolveram a AIDS, e a fração de indivíduos infectados que já desenvolveram a doença por y numa população inteiramente infectada sem tratamento, o modelo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\lambda(t)x(t), \quad x(0) = 1 \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \lambda(t)x(t), \quad y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Assumimos que no instante inicial a fração de infectados é máxima e a fração de doentes é nula. Além disso, vale que $x + y = 1$, de forma que, resolvida a equação para $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, podemos encontrar $x(t) = 1 - y(t)$. Vale lembrar que este modelo possui importância pedagógica e que não considera muitos aspectos importantes da dinâmica do HIV.

Sem tratamento, quanto mais tempo infectado pelo virus, mais próximo o paciente fica do início dos sintomas.Isso significa que

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \lambda(t) > 0, \end{aligned}$$

onde $\lambda'(t) > 0$, ou seja, a taxa de conversão é uma função crescente e positiva. Dessa forma, escrevendo $1 - y(t) = A(y(t))$, temos que:

$$\frac{d}{dt}\left(A(y(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - y(t)\right) = -y'(t) = -\frac{d}{dt}(y(t)) = -\lambda(t)A(y(t)) < 0, \tag{4.21}$$

já que $A(y(t)) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, ou seja, o campo de crescimento da população sintomática é positivo e decrescente em t.

Reescrevendo a dinâmica da população sintomática, temos que:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = \lambda(t)(1 - y(t)) \\ \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4.22}$$

cuja solução pode ser escrita como

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \lambda(\tau)(1 - y(\tau))d\tau, \tag{4.23}$$

ou seja,

$$y(t) = \int_0^t \lambda(\tau)(1 - y(\tau))d\tau, \tag{4.24}$$

que pode ser vista como uma equação integral de Choquet. Neste caso, basta tomar $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $m'(\tau) = \lambda(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Neste caso, $\dfrac{1}{m'(\tau)}$ representa o tempo médio de permanência dos indivíduos em estado assintomático numa unidade τ. Assim, a função m é uma aplicação cujo crescimento representa a taxa de conversão no tempo da população assintomática para sintomática. O PVI com derivada de Choquet equivalente é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{d\mu_m} = 1 - y(t) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

4.3.2 Modelo Logístico

O modelo de crescimento populacional proposto por Verhulst (1838, 1845) propôs que um processo auto limitante deveria operar quando a população atingisse uma quantidade muito grande. Este processo seria determinado por uma *capacidade de suporte* do ambiente, determinado pelos recursos de sustentação de vida disponíveis [11].

Se $N = N(t)$ expressa a população em questão no instante de tempo t e K a capaciade de suporte do ambiente, então a sua variação pode ser descrita por:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right), \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{4.26}$$

onde r e K são constantes positivas.

A solução para o PVI 4.26 é dada por

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \to K \text{ quando } t \to \infty. \tag{4.27}$$

A solução clássica do modelo de crescimento logístico representada na Figura 4.3.2 depende da condição inicial do PVI representada por $N(0)$. Isso significa que escrevendo

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = B(N(t)), \tag{4.28}$$

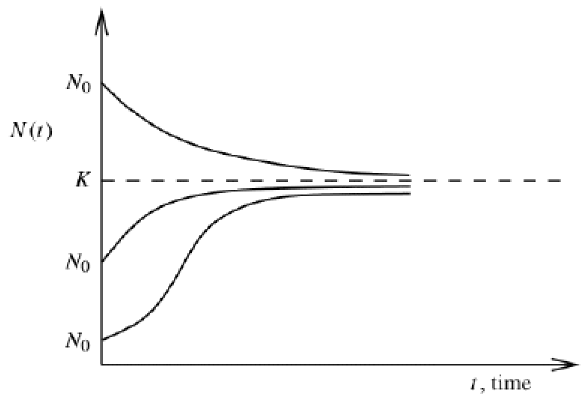

Figura 6 – Solução clássica do Modelo Logístico [11]

onde $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o campo de crescimento da população $N = N(t)$, temos que:

$$\begin{cases} N(0) < K \Leftrightarrow B(N(t)) > 0 \\ N(0) > K \Leftrightarrow B(N(t)) < 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

por meio do qual podemos avaliar o PVI 4.26 na representação como PVI de Choquet.

Vamos representar a equação diferencial de crescimento logístico em 4.26 por uma equação diferencial linear e homogênea equivalente. Para isso, temos a seguinte:

Definição 4.2. *Uma equação diferencial de Bernoulli é representada por* $y' + P(t) = Q(t)y^n$*, onde* $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas e* n *é um natural.*

Boyce [2] sugere a linearização das equação de Bernoulli através da mudança de variáveis dada por $\zeta = y^{1-n}$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} y' + P(t)y &= Q(t)y^n \\ \frac{y'}{y} + P(t) &= Q(t)y^{n-1} \\ \frac{y'}{y} + P(t) &= \frac{Q(t)}{y^{1-n}} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Se $z = y^{1-n}$, então

$$\begin{aligned} z' = (1-n)y^{(1-n)-1}y' &= (1-n)y^{-n}y' \\ &= (1-n)\frac{y'}{y^n} \\ &= (1-n)\frac{y'}{y^{n-1}}\frac{1}{y} \\ &= (1-n)\frac{y'}{y}y^{1-n} \\ &= (1-n)\left(\frac{y'}{y}\right)z \ \text{ e, portanto,} \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}\frac{1}{1-n}. \tag{4.32}$$

Substituindo 4.32 na Equação 4.30, temos

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z}\frac{1}{1-n} + P(t) &= Q(t)z^{-1} \\ \frac{z'}{1-n} + P(t)z &= Q(t) \end{aligned}$$

onde

$$z' + (1-n)P(t)z = (1-n)Q(t), \tag{4.33}$$

que é a linearização da Equação 4.30.

Logo, a Equação do PVI 4.26 pode ser reescrita como

$$N(t)' + (-r)N(t) = \frac{-r}{K}N^2(t), \tag{4.34}$$

que é uma equação de Bernoulli. Aplicando a mudança de variável $z = \dfrac{1}{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z(t)}\right)' + (-r)\left(\frac{1}{z(t)}\right) &= -\frac{r}{K}\left(\frac{1}{z(t)}\right)^2 \\ -\frac{z'(t)}{z^2(t)} - \frac{r}{z(t)} &= -\frac{r}{K}\frac{1}{z^2(t)} \\ -z'(t) - rz(t) &= -\frac{r}{K} \\ -z'(t) - rz(t) + \frac{r}{K} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o PVI 4.26 é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = -rz(t) + \dfrac{r}{K} \\ z(0) = \dfrac{1}{N_0}, \end{cases} \tag{4.35}$$

Assim, escrevendo $\dfrac{dz(t)}{dt} = r\left(-z(t) + \dfrac{r}{K}\right) = rA(z(t))$, onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o campo de crescimento de $z = z(t)$, então, pela relação 4.29

$$\begin{cases} A(z(t)) > 0 \Leftrightarrow z(0) < \dfrac{1}{K} \\ A(z(t)) < 0 \Leftrightarrow z(0) > \dfrac{1}{K}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Em ambos os casos, a solução do PVI linearizado 4.35 é dada por

$$z(t) = z(0) + \int_0^t rA(z(\tau))d\tau, \tag{4.37}$$

ou seja,

$$z(t) = \frac{1}{N_0} + \int_0^t r\left(-z(\tau) + \frac{1}{K}\right)d\tau. \tag{4.38}$$

Vamos mostrar que o PVI 4.35 pode ser reescrito como um PVI com derivada de Choquet.

Considere a equação integral de Choquet 2.17 em que z é dada por

$$z(t) = z(0) + (C)\int_{[0,t]} g d\mu_m. \tag{4.39}$$

Quando $z(0) = \dfrac{1}{N(0)} < \dfrac{1}{K}$, $A(z(t)) > 0$ e

$$\frac{d}{dt}(A(z(t))) = \frac{d}{dt}\left(-z(t) + \frac{1}{K}\right) = -z'(t) < 0, \tag{4.40}$$

ou seja, neste caso, a função $g(t) = A(z(t))$ é positiva e decrescente.

Pelo Teorema 3.1, a Equação 4.39 é equivalente a

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \int_0^t m'(\tau)g(\tau)d\tau \\ &= z(0) + \int_0^t m'(\tau)\left(-z(\tau) + \frac{1}{K}\right)d\tau. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Por outro lado, quando $z(0) = \dfrac{1}{N(0)} > \dfrac{1}{K}$, temos que $A(z(t)) < 0$ e

$$\frac{d}{dt}(A(z(t))) = \frac{d}{dt}\left(-z(t) + \frac{1}{K}\right) = -z'(t) > 0, \tag{4.42}$$

ou seja, $g(t) = A(z(t))$ é negativa e crescente.

Pelo Teorema 3.2, a equação integral de Choquet equivalente a 4.39 é

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \int_{[0,t]} m'(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= z(0) + \int_0^t m'(t-\tau)\left(-z(t) + \frac{1}{K}\right)d\tau. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Logo, o PVI com derivada de Choquet equivalente às Equações 4.41 e 4.43 é

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{d\mu_m} = -z(\tau) + \dfrac{1}{K} \\ z(0) = \dfrac{1}{N(0)}, \end{cases} \tag{4.44}$$

onde $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $m'(\tau) = r$, $\tau \in [0, t]$.

5 Considerações Finais

Este trabalho tratou do Cálculo de Choquet e de suas propriedades do ponto de vista da Integral e a derivada de Choquet. Para isso, algumas exigências foram feitas do ponto de vista analítico. Se em primeiro plano apenas as funções monótonas positivas estavam contempladas pelas identidades demonstradas, nesse texto vimos que as funções reais monótonas também possuem tais propriedades. Isso significa que as funções positivas, como espaço de funções mais restrito, herdam as propriedades das funções reais. A extensão da Derivada de Choquet proposta neste texto não parece ser engessada do ponto de vista teórico, isto é, a derivada como operação inversa da Integral de Choquet deve exigir condições necessárias e suficientes que ainda não foram compreendidas em sua totalidade.

Da mesma forma que seus aliceres teóricos, a relação geométrica da Derivada de Choquet com a derivada clássica permanece uma questão aberta, mesmo que alguns casos tenham sido estudados por relações algébricas e simulações. Estabelecer uma relação entre esses dois funcionais pode ser uma via de compreensão mais resistente do Cálculo de Choquet.

Do ponto de vista do estudo de dinâmicas de população, encontrar soluções alternativas via PVI com Derivada de Choquet condiz com a incerteza a priori das medidas fuzzy no sentido que permitem uma análise das soluções mais flexível que no caso clássico.

Assim, as perspectivas para estudos futuros habitam no estudo de uma representação geral para a Integral de Choquet e da análise de estabilidade dos PVIs com Derivada de Choquet, que também pode ser útil para modelagens biológicas.

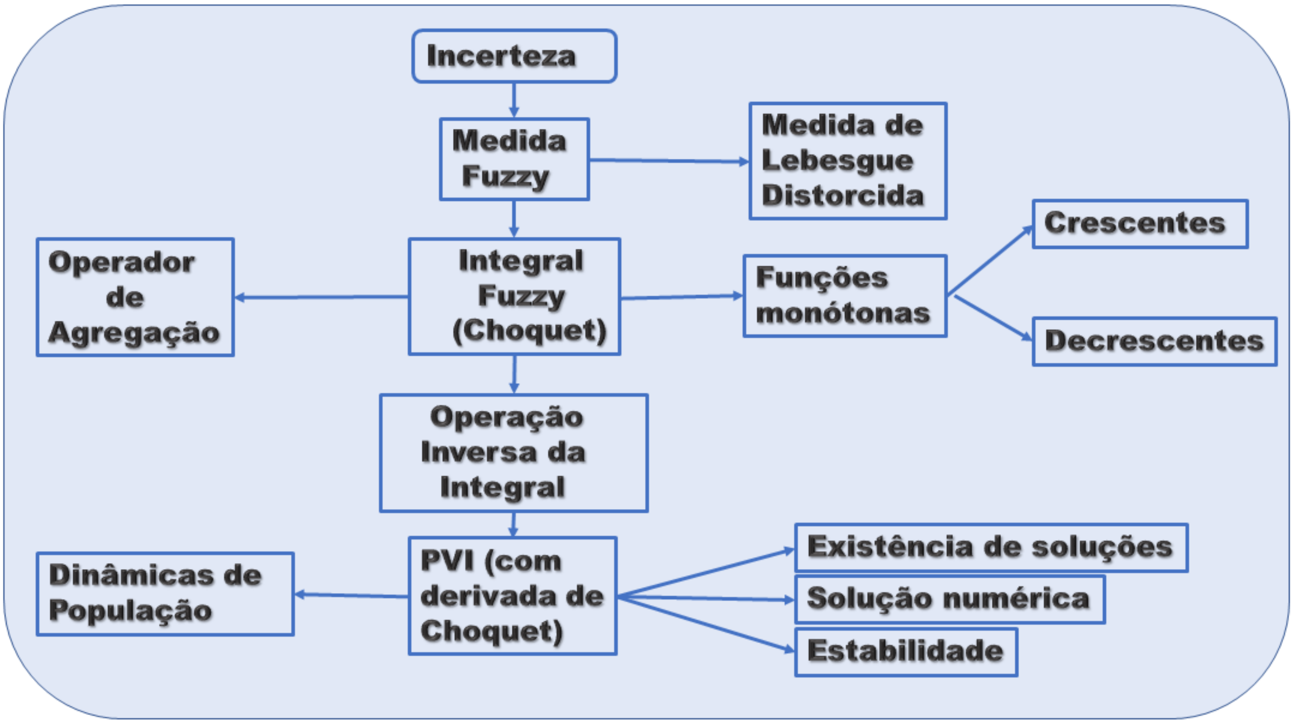

Figura 7 – Fluxograma do trabalho

Referências

[1] R. Anderson, G. Medley, R. May, and A. Johnson. A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (hiv), the causative agent of aids. *Mathematical Medicine and Biology*, 3(4):229–263, 1986.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and C. W. Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems*, volume 9. Wiley New York, 1969.

[3] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'institut Fourier*, 5:131–295, 1954. URL http://eudml.org/doc/73714.

[4] R. S. da Motta Jafelice. *Modelagem fuzzy para dinamica de transferéncia de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta*. PhD thesis, Tese (Doutorado em Matemática), Universidade de Campinas, Campinas, SP, 2003.

[5] L. C. de Barros. *Modelos determinísticos com parâmetros subjetivos. 1992. 217 f.* PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de Campinas, Campinas, SP, 1992.

[6] L. C. de Barros, R. C. Bassanezi, and W. A. Lodwick. A first course in fuzzy logic, fuzzy dynamical systems, and biomathematics, 2017.

[7] P. Dyke. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2014. ISBN 9781447163954.

[8] E. Esmi and L. C. de Barros. Diferentes abordagensa teoria de possibilidade.

[9] C. S. Hönig. A integral de lebesgue e suas aplicações. *11º Colóquio Brasileiro de Matemática*, pages 237–253, 1977.

[10] A. Kolmogorov and S. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1975. ISBN 9780486612263.

[11] J. D. Murray. *Mathematical biology: An introduction*. Springer, 2002.

[12] H. Nguyen and E. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic, Third Edition*. Chapman & Hall-CRC mathematics. Taylor & Francis, 2005. ISBN 9781584885269.

[13] W. Pedrycz and F. Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley, 2007. ISBN 9780470168950.

[14] A. S. Perelson and P. W. Nelson. Mathematical analysis of hiv-1 dynamics in vivo. *SIAM review*, 41(1):3–44, 1999.

[15] M. Sugeno. Theory of fuzzy integrals and its applications. *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*, 1975.

[16] M. Sugeno. A note on derivatives of functions with respect to fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 222:1–17, 2013.

[17] M. Sugeno. A way to choquet calculus. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(5): 1439–1457, 2015.

[18] L. Von Bertalanffy. A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. ii). *Human biology*, 10(2):181–213, 1938.

[19] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.